# Vzorová řešení MatX 2016

matx.p-mat.sk

10. února 2016

**Úloha 1**

Každý ze znaků “#” zaměníme buď za “+”, nebo “×”, jaká je nejmenší možná hodnota výrazu 1 # 2 # 3 # 4 # 5 # 6 # 7 # 8 # 9?

***Řešení 1***

Podívejme se nejprve na možnost, kdy bychom všechny znaky “#” vyměnili za “+”. Hodnota výrazu 1 # 2 # 3 # 4 # 5 # 6 # 7 # 8 # 9 by v tomto případě byla 45. Můžeme některý znak “+” vyměnit za “×” tak, abychom snížili hodnotu výrazu? Pokud nahradíme $1+2$ ve výrazu $1 \times 2$, celková hodnota výrazu se sníží o 1, protože $1 \times 2$ je o jedna méně než 1+2. V případě všech dalších dvojic však bude součin vždy větší než součet, takže nahrazením “+” za “×” bychom celkovou hodnotu zvýšili.

Podobně je to při nahrazování znamének v trojicích: záměnou dvou po sobě jdoucích “+” za “×” celkovou hodnotu výrazu nikdy nesnížíme. To platí i pro čtveřice, pětice, atd. Takže kromě záměny $1 + 2$ za $1 \times 2$ nemůžeme nikde zaměnit “+” za “×” tak, abychom hodnotu výrazu snížili. Nejmenší možná hodnota výrazu tedy bude $1 \times 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$.

**Úloha 2**

Péťa dosadil za písmena A, B, C, D některé z číslic od 1 do 9 tak, že platilo: AAAA + BBB + CC + D = 2016. Jaký je součin číslic A, B, C, D? Pozn.: Zápis AAAA znamená čtyřciferné číslo, v kterém je ta stejná cifra čtyřikrát po sobě. Tedy například kdyby Péťa za A dosadil 3, AAAA by znamenalo 3333.

***Řešení 2***

Hodnota A musí být určitě 1. Pokud by byla 2 a více, tak bychom nikdy nemohli dostat 2016 jako výsledek, protože 2222 je větší než 2016 a BBB, CC i D jsou všechny kladné. Hodnota B musí být 8. Kdyby byla 9, tak bychom opět dostali součet větší než 2016. Pokud by byla 7, tak bychom dostali součet 1888. I kdybychom k tomuto součtu přičetli maximální možné hodnoty CC = 99 a D = 9, tak bychom dostali 1996, což je méně než 2016. Takže B = 8. Náš prozatímní součet je tedy 1111 + 888 = 1999. Hodnota C musí být 1, opět proto, že pro 2 a výše bychom dostali součet větší než 2016. 1111 + 888 + 11 = 2010. D je tedy 6. Součin ABCD = $1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6 = 48$.

**Úloha 3**

Kostku s hranou délky 10 cm rozřežeme na 8 kostek s hranou délky 5 cm. Povrch všech menších kostek dohromady bude větší než povrch původní kostky. O kolik $cm^2$ bude větší?

***Řešení 3***

Povrch kostky s hranou délky 10 cm je $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600\ cm^2$. Povrch menší kostky s hranou 5 cm je

$6 \cdot 5 \cdot 5 = 150\ \text{cm}^2$. Menších kostek je 8, tedy jejich celkový povrch je $8 \cdot 150 = 1200\ \text{cm}^2$. To je o $600\ \text{cm}^2$ víc než povrch původní kostky.

**Úloha 4**

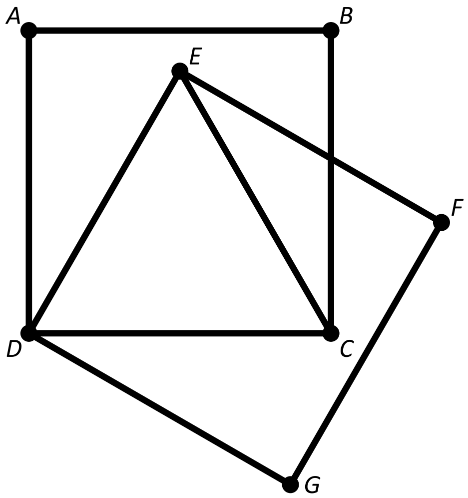
Mirek seděl na přednášce o posloupnostech, ale všechno už věděl, a tak si začal vymýšlet své vlastní posloupnosti. Začal číslem 128. Z něho odvodil další člen posloupnosti takto: 8 × 8 + 5 = 69. Potom pokračoval stejným způsobem a z čísla 69 dostal 9 × 9 + 5 = 86. Vždy tedy získá další člen posloupnosti následovně: nejdřív z předcházejícího členu posloupnosti vezme cifru na místě jednotek. Tu vynásobí samu se sebou a k výsledku přičte číslo 5. Jaké číslo je na 2016. místě této posloupnosti?

***Řešení 4***

Mirkova posloupnost začínala: 128, 69, 86, 41, 6, 41, 6, ... V posloupnosti se dále opakovala jen čísla 41 a 6 tak, že číslo 6 se vyskytovalo vždy na lichých pozicích (tedy jako páté, sedmé, deváté atd.) a číslo 41 se vyskytovalo vždy na sudých pozicích (tedy jako šesté, osmé, desáté atd.). Číslo 2016 je sudé, takže na 2016. pozici se muselo nacházet číslo 41.

**Úloha 5**

Na obrázku je rovnostranný trojúhelník *CDE*. *ABCD* a *DEFG* jsou čtverce. Kolik stupňů má úhel *GDA*?




***Řešení 5***

Úhel *CDE* má velikost 60°, protože *CDE* je rovnostranný trojúhelník. Úhel *GDE* má velikost 90°, protože *EFGD* je čtverec. Z toho vyplývá, že velikost úhlu *GDC* je $|GDE| - |CDE| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Úhel *CDA* je pravý. Velikost úhlu *GDA* je tedy $|GDC| + |CDA| = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

**Úloha 6**

Najděte čtyřciferné číslo, které splňuje všechny následující vlastnosti:

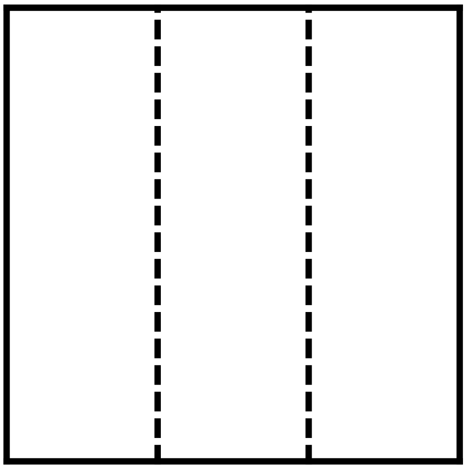
- číslo nesmí obsahovat nulu,
- první cifra je čtyřnásobkem poslední cifry,
- druhá cifra je o jedna větší než první cifra,
- druhá cifra je trojnásobkem třetí cifry.

***Řešení 6***

Poslední cifra může být 1, nebo 2. Čtyřnásobek většího čísla by již nebylo jednociferné číslo, a tudíž by to nebyla cifra. Nechť je poslední cifra 1. Potom je první cifra 4, druhá cifra 5. Třetí cifra by však v tomto případě nebyla přirozené číslo, takže tuto možnost můžeme zavrhnout. Poslední cifra je tedy 2. První tím pádem 8, druhá 9, třetí 3. Výsledek je 8932.

**Úloha 7**

Čtverec rozstřihneme na tři obdélníky. Rozstřihneme ho podél dvou úseček rovnoběžných k straně čtverce, jako na obrázku. Obvod každého obdélníku je 24 cm. Jaký obsah v $cm^2$ měl původní čtverec?



***Řešení 7***

Označme délku strany čtverce $a$. Potom je délka obvodu každého z obdélníků $2a + 2a/3 = 8a/3$, protože všechny mají stejně velký obvod, tedy musí mít stejně dlouhou kratší stranu. Zároveň víme, že délka tohoto obvodu je 24 cm, tedy $8a/3 = 24$, tedy $a = 24 \cdot 3/8 = 9$. Obsah čtverce snadno určíme, že je $9 \cdot 9 = 81$.

**Úloha 8**

Na stole leží koláč v tvaru obdélníku s rozměry 42 × 70 cm. Anička si řekla, že ho musí rozdělit na stejné kousky tak, aby to byly co největší čtverce. Jakou délku strany v cm bude mít každý kousek? Pozn. délka stran čtvercových kousků musí být celé číslo.

***Řešení 8***

Potřebujeme, aby délka strany čtverce dělila jednak délku a jednak šířku celého koláče, ale zároveň byla co největší. Tím pádem hledáme největšího společného dělitele čísel 14 a 72, což je 14.

**Úloha 9**

Padesát žáků psalo test z matematiky. Průměrný počet bodů byl 68 bodů. Deset nejlepších žáků dosáhlo 100 bodů. Jaký je průměrný počet bodů zbylých čtyřiceti žáků?

***Řešení 9***

Celkový součet bodů všech žáků je $68 \cdot 50 = 3400$. Součet bodů nejlepších 10 žáků je $100 \cdot 10 = 1000$, takže součet bodů zbylých žáků je 2400. Bodový průměr zbylých čtyřiceti žáků je tedy $2400/40 = 60$.

**Úloha 10**

Ve třídě se učí španělsky dvě třetiny děvčat a polovina chlapců. Ve třídě je dvakrát tolik chlapců co děvčat. Jaká část třídy se učí španělsky?

***Řešení 10***

Z druhé věty zadání víme, že ve třídě jsou 2/3 chlapci a 1/3 děvčata. Z chlapců se učí španělsky 1/2, tedy 1/3 celkového počtu dětí. Z děvčat se učí španělsky 2/3, tedy $2/3 \cdot 1/3 = 2/9$ celkového počtu dětí. $2/9 + 1/3 = 2/9 + 3/9 = 5/9$.

**Úloha 11**

Součin cifer dnešního Ondřejova věku je stejný jako před šesti roky a nerovná se nule. Ondřejův věk je zároveň nejmenší možný věk s těmito dvěma vlastnostmi. Za kolik roků nejdříve bude součin cifer Ondřejova věku opět stejný jako dnes?

***Řešení 11***

Aby tento jev mohl nastat, musí se Ondřejův věk v průběhu oněch šesti let přehoupnout přes násobek desítky. Pokud by to tak nebylo, tak by nemohla nastat rovnost, protože ciferné součiny v rámci jedné desítky jen stoupají. Ondřejovi by tedy mohlo být 11, 12, 13, 14 nebo 15. Ani jedno z toho však nevychází. Vyzkoušejme 21, 22, 23, 24, 25. Pro 24 nacházíme shodu, protože $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$. Zbývá tedy nalézt nejmenší takové číslo, které je větší než 24 a má opět ciferný součin 8. Jak už jsme řekli, nemůže to být už žádný další věk v jeho dvacátých letech. Nemůže to být žádný věk 30 a něco, protože 3 nedělí 8. Dále již snadno najdeme věk 42, který má ciferný součin 8 a ukázali jsme, že menší takový věk (větší než 24) neexistuje. 42 let bude Ondřejovi za $42 - 24 = 18$ let.

**Úloha 12**

V Kocourkově chtějí vyměnit na všech domech popisná čísla. Domy budou očíslované postupně od 1. Starosta Kocourkova, pan Drápek, chce nová čísla na domy vyskládat z tabulek s jednotlivými ciframi. Vypočítal, že takových tabulek potřebuje přesně 999. Kolik domů je v Kocourkově?

***Řešení 12***

Na označení domů s čísly 1 až 9 potřebuje starosta 9 tabulek (na každý dům jednu). Na označení domů s čísly od 10 do 99 potřebuje starosta $2 \cdot 90 = 180$ tabulek (na každý dům dvě). Na označení domů s trojcifernými čísly tedy starostovi zůstává $999 - 189 = 810$ tabulek, přičemž od čísla 100 po nějaké číslo $n$ starosta bude potřebovat $3 \cdot (n - 99) = 3n - 279$ tabulek (na každý dům tři). Řešením $810 = 3n - 297$ je $n = 369$, tabulky tedy vystačí na očíslování domů po číslo 369.

**Úloha 13**

Karel se narodil v dvacátém století. Při letošních narozeninách (2016) si něčeho všiml: jeho současný věk je trojnásobkem posledního dvojčíslí roku, ve kterém se narodil. V kterém roce se Karel narodil?

***Řešení 13***

Nechť je rok narození Karla $x$. Jeho současný věk je tedy $2016 - x$. Vzhledem k tomu, že se Karel narodil v 20. století, je poslední dvojčíslí roku jeho narození rovno $x - 1900$. Tedy vztah ze zadání vyjádříme jako $2016 - x = (x - 1900) \cdot 3$. Upravením získáme rok Karlova narození $x = 1929$.

**Úloha 14**

Babička a její vnučka Barunka mají narozeniny ve stejný den. Při šesti po sobě jdoucích oslavách narozenin byl babiččin věk dělitelný věkem Barunky. Kolikáté narozeniny oslavila babička na poslední z těchto oslav? Babička nemá víc než 100 let.

***Řešení 14***

Věk Barunky mohl být při první oslavě buď 1 rok, nebo libovolné jiné číslo. Pokud by však byl libovolné jiné číslo než 1, tak by babička musela mít v každém roce neprvočíselný věk. To proto, že prvočíslo je dělitelné jen jedničkou a sebou samotným, takže pokud by babička měla prvočíselný věk, tak by její věk nemohl být dělitelný Barunčiným, leda by měla buď stejně jako ona, nebo 1 rok. Pokud by však měla

Barunka v prvním roce jeden rok, tak by zrovna v tom roce mohla mít babička prvočíselný věk. V zbylých pěti letech by již ale babička musela mít neprvočíselný věk.

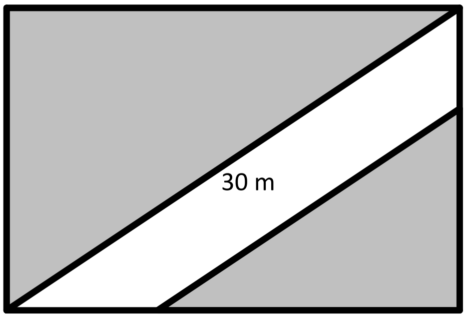
Ověřme napřed druhou možnost. Aby platila, musíme najít 6 po sobě jdoucích čísel, která nejsou prvočísla a najít k nim příslušné stáří Barunky. Vypíšeme-li si všechna prvočísla od 2 do 100, zjistíme, že takových 6 čísel neexistuje.

Musí tedy platit druhá možnost a Barunka má při prvních společných narozeninách 1 rok. Babička tehdy bude mít prvočíselný věk a zbylé roky již musí mít věk neprvočíselný. Intervaly, kde je 5 po sobě jdoucích neprvočísel jsou tyto: 23–29, 31–37, 53–59, 61–67, 73–79 a 91–97.

První čísla všech intervalů jsou dělitelná jedničkou. I druhá čísla všech intervalů jsou dělitelná dvojkou. Ovšem trojkou již nejsou dělitelná třetí čísla intervalů 23–29, 53–59 a 73–79. Zbývají nám tedy jen intervaly 31–37, 61–67 a 91–97. Podívejme se na čtvrtá čísla těchto intervalů a ověřme jejich dělitelnost čtyřkou. 34 není dělitelné 4, 64 je, 94 není. Zbývá nám tedy jediný interval: 61–67. Zbývá nám ještě ověřit, zda 65 je dělitelné 5 (ano) a 66 je dělitelné 6 (ano). Babičce tím pádem bylo na poslední z šesti oslav 66 roků.

**Úloha 15**

Pan Šmik měl zahradu velkou 432 m$^2$. Nová cesta, kterou v obci postavili, protíná jeho zahradu tak, jak vidíte na obrázku. Jedna její strana, dlouhá přesně 30 metrů, je uhlopříčkou obdélníkové zahrady. Zbylé dvě části zahrady mají poměr ploch 4:9. Pan Šmik prodal obci pozemek pod novou cestou. Za každý prodaný m$^2$ dostal pan Šmik 3 eura. Kolik eur dostal pan Šmik za pozemek pod novou cestou?




***Řešení 15***

Větší trojúhelník zabírá přesně polovinu plochy obdélníkové zahrady, tedy musí mít plochu 432/2 = 216 m$^2$. O spodním (menším) trojúhelníku víme, že poměr jeho plochy k velkému trojúhelníku je 4:9, tedy plocha menšího trojúhelníku musí být $4/9 \cdot 216 = 96$ m$^2$. Celková plocha obou trojúhelníků je tedy 216 + 96 = 312 m$^2$. Plocha cesty je tedy 432 – 312 = 120 m$^2$. Tím pádem dostal pan Šmik zaplaceno $120 \cdot 3 = 360$ eur.

**Úloha 16**

Najděte nejmenší přirozené číslo dělitelné 9, které má jen sudé cifry. Pozn.: Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

***Řešení 16***

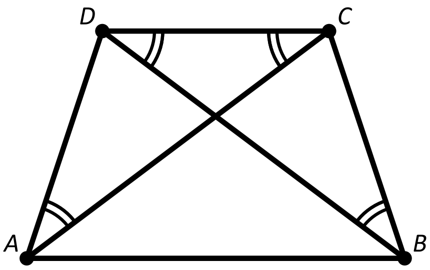
Na nalezení odpovědi použijeme pravidlo pro dělitelnost devíti: Číslo je dělitelné devíti tehdy a právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný devíti. Nejmenší možný ciferný součet dělitelný devíti je 9. Pokud by však mělo číslo tento ciferný součet, tak by nutně nemohlo být složeno jen ze sudých cifer (protože součet sudých čísel je opět sudý). Tím pádem musíme uvažovat druhý nejmenší možný ciferný součet dělitelný devíti: 18. Jediné dvojciferné číslo s tímto součtem je 99, které však nemá jen sudé cifry. Musíme tedy uvažovat trojciferná čísla. Čísla v rozmezí 100–199 můžeme rovnou zahodit, protože mají jednu lichou cifru 1. Zbývá najít nejmenší číslo větší než 200 s ciferným součtem 18. Protože už obsahuje cifru 2, součet zbylých cifer musí být 16. Nejmenší takové číslo je 79, to ale nemá sudé cifry. Druhé nejmenší je 88, které již má obě cifry sudé. Nejmenší přirozené číslo dělitelné devíti, které má jen sudé cifry, je tedy 288.

**Úloha 17**

V rovnoramenném lichoběžníku *ABCD*, kde *AB* je rovnoběžné s *CD*, platí, že $|AD| = |CD|$. Úhel *DBC* má velikost 35°. Kolik stupňů má úhel *ADB*?

***Řešení 17***

$|AD| = |CD|$. Z toho automaticky plyne, že $|AD| = |CD| = |BC|$, protože se jedná o rovnoramenný lichoběžník. Z toho plyne, že úhly $|DBC| = |CDB|$ (protože *BCD* je rovnoramenný trojúhelník). Dále se stejných důvodů platí, že $|CAD| = |ACD|$. Ale také platí, že $|CDB| = |ACD|$, protože lichoběžník je rovnoramenný.



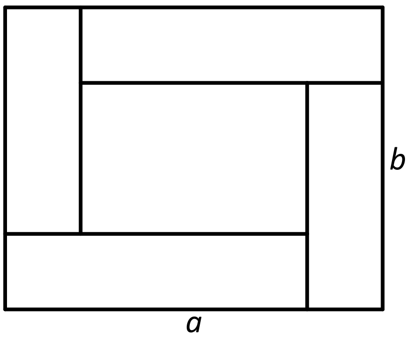

V trojúhelníku *ACD* tedy známe úhly *ACD*, *CDB* a *DAC*. Neznáme jedině úhel *ADB*. Víme však, že součet úhlů v trojúhelníku je vždy 180°. Proto platí, že $|ACD| + |CBD| + |ADB| + |CAD| = 180^\circ$, tedy $35^\circ + 35^\circ + |ADB| + 35^\circ = 180^\circ$. Z toho již vyplývá, že $|ADB| = 75^\circ$.

**Úloha 18**

Délka obdélníkové zahrady je o 7 m větší než její šířka. Postavením chodníku se šířkou 1 m po celém obvodu zahrady se její plocha zmenšila o 50 m$^2$. Jaké jsou rozměry zahrady v metrech? Rozměry zadejte seřazené vzestupně.

***Řešení 18***

Označme délku písmenem *a*, šířku písmenem *b*. Ze zadání víme, že $a = b + 7$. Zároveň taky umíme spočítat plochu chodníků. Rozdělme si je na 4 obdélníky jako na obrázku.




Všechny obdélníky mají šířku 1 m. Celková plocha chodníku je tedy $(b-1)\cdot1\cdot2+(a-1)\cdot1\cdot2 = 2b-2+2a-2 = 2a + 2b - 4$. Ze zadání víme, že plocha chodníku je 50 m$^2$, tedy $2a + 2b - 4 = 50$. Upravíme na $a + b = 27$.

Dosazením $a = b + 7$ získáme: $b + 7 + b = 27$, tedy $b = 10$. Z toho plyne, že $a = 17$. Rozměry zahrady jsou tedy $10 \times 17$.

**Úloha 19**

Kolik čísel od 0 do 999 obsahuje alespoň jednu číslici 5?

***Řešení 19***

Všechny stovky se chovají z hlediska množství pětek stejně, s výjimkou 500–599. V páté stovce bude automaticky 100 čísel s pětkou. Tím máme tuto stovku vyřešenou. Ve všech ostatních stovkách budou následující čísla s pětkou: s05, s15, s25, s35, s45, s65, s75, s85, s95, kde s je stovková cifra. To je celkem 9 čísel. Potom ale ještě musíme přičíst 10 čísel s50–s59. Tedy v každé stovce, s výjimkou páté stovky, bude 19 čísel s pětkou. Tedy celkem bude v daném intervalu $9 \cdot 19 + 100 = 271$ čísel s pětkou.

**Úloha 20**

Anička si v obchodě vybrala sandály za 40 €. Majiteli obchodu, panu Kaštánkovi, za ně zaplatila padesátieurovou bankovkou. Pan Kaštánek neměl drobné, tak zašel vedle k panu Kyselému, a ten mu padesátku rozměnil za 5 desítek. Pan Kaštánek se vrátil a vydal Aničce 10 €, načež spokojeně odešla. Pan Kyselý se ale po chvilce vrátil s tvrzením, že padesátieurovka byla falešná a žádal za ni náhradu. Pan Kaštánek mu vyhověl a dal mu 50 €. Jak velkou ztrátu v eurech utrpěl pan Kaštánek?

***Řešení 20***

Pan Kaštánek určitě přišel minimálně o 40 eur, protože nedostal zaplaceno za boty v této ceně. Pojďme se ale podívat, jak to bylo s dalšími penězi, o které přišel. Představme si, že pan Kyselý, který mu rozměnil falešnou padesátku za 5 desetieurovek, by si na každou z těch desetieurovek udělal fixou tečku. Pan Kaštánek by se potom vrátil a 10 eur (s tečkou) by vydal Aničce. Za chvíli by přišel pan Kyselý, a chtěl by zpátky 50 eur. Pan Kaštánek by mu tedy vrátil 40 eur s tečkami, ale ještě by musel doplatit vlastních 10 eur (bez tečky). Tím pádem ztratil pan Kaštánek celkem 50 eur.

**Úloha 21**

Na obrázku je magický čtverec, tedy takový čtverec, že součet čísel v každém z jeho řádků, sloupců a uhlopříček je stejný. Jaké jsou hodnoty čísel $v$, $w$, $x$, $y$ a $z$ (v tomto pořadí)?

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | 24 | $w$ |
| 18 | $x$ | $y$ |
| 25 | $z$ | 21 |

***Řešení 21***

Aby platily podmínky ze zadání, musí platit, že $25 + z + 21 = 24 + x + z$. Úpravou dostaneme, že $x = 22$. Když už víme $x$, můžeme použít vztah $18 + x + y = w + y = 21$, který upravíme na $18 + 22 + y = w + y + 21$, z čehož získáme $w = 19$. Nyní již víme, jaký je součet na uhlopříčce: $25 + 22 + 19 = 66$. Snadno tedy zjistíme zbylé hodnoty $v = 66 - 18 - 25 = 23$, $z = 66 - 24 - 22 = 20$ a $y = 66 - 18 - 22 = 26$. Odpověď je tedy v správném pořadí: $v = 23$, $w = 19$, $x = 22$, $y = 26$, $z = 20$.

**Úloha 22**

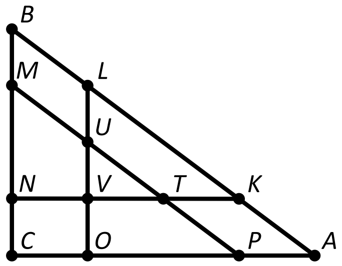
Leo řekl: „Přesně třetina hran mého kvádru má délku jinou než 5 cm. Přesně třetina stěn mého kvádru má obsah jiný než 40 $cm^2$." Jaký objem v $cm^3$ měl tento Leův kvádr?

***Řešení 22***

Přesně třetina hran (tedy 12/3 = 4 hrany) má jinou délku než 5 cm. Z toho plyne, že 8 hran má délku 5 cm. Protože na natočení kvádru nezáleží, nechť je šířka a výška kvádru rovná 5 cm. Z toho také plyne, že 2 stěny mají obsah 25 cm$^2$. Přesně třetina stěn (tedy 6/3 = 2 stěny) má obsah jiný než 40 cm$^2$, tedy 4 stěny mají obsah 40 cm$^2$. Protože však již víme šířku a výšku, zbývá zjistil jen hloubka, která tedy musí být rovná 40/5 = 8 cm. Objem je tedy $5 \cdot 5 \cdot 8$ cm$^3$ = 200 cm$^3$.

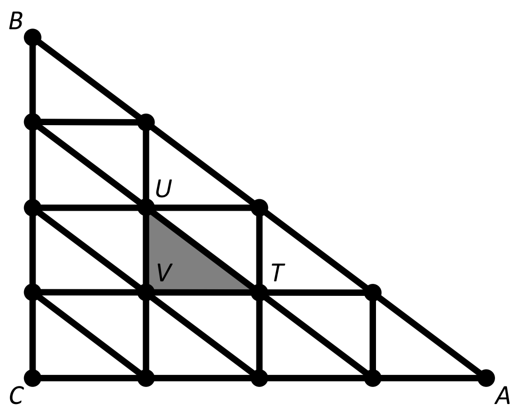
**Úloha 23**

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem u vrcholu *C* jsou na stranách *AB*, *BC*, *CA* dány postupně dvojice bodů *K*, *L* a *M*, *N* a *O*, *P*. Přitom platí: $|AK| = |LB| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BM| = |NC| = \frac{1}{4}|BC|$, $|CO| = |PA| = \frac{1}{4}|CA|$. Přímky *KN*, *MP*, *OL* ohraničují trojúhelník *TUV* s celočíselnými délkami stran. Obsah trojúhelníku *TUV* je 6 cm$^2$. Jaký je obvod trojúhelníku *ABC* v cm?




***Řešení 23***

Obsah trojúhelníku *TUV* je 6 cm$^2$. Protože je pravoúhlý, tak jeho obsah získáme $|UV| \cdot |VT|/2$. Protože *UV* i *VT* jsou celočíselné, tak jediné možné kombinace *UV* a *VT* jsou 1, 12; 2, 6 a 3, 4 (plus 4, 3; 6, 2 a 12, 1, které však neuvažujeme, protože je to samé, akorát otočené o 90 stupňů). Z Pythagorovy věty však víme, že v případě 1, 12 i 2, 6 by třetí strana neměla celočíselnou délku. Takže víme, že délky stran trojúhelníku *TUV* jsou 3, 4 a 5.




Dokresleme si do obrázku spojnice tak, jako na obrázku. Nyní vidíme, že strany trojúhelníku *ABC* jsou čtyřikrát tak delší než strany trojúhelníku *TUV*. Protože trojúhelník *TUV* má obvod 3 + 4 + 5 = 12, trojúhelník *ABC* bude mít obvod $4 \cdot 12 = 48$.

**Úloha 24**

Nazvěme číslo šikovné, pokud je třetí mocninou nebo se dá zapsat jako součet méně než devíti třetích mocnin kladných celých čísel. Například číslo 12 je šikovné, protože se dá zapsat jako $2^3+1^3+1^3+1^3+1^3$. Najděte nejmenší kladné celé číslo, které není šikovné. Poznámka: Třetí mocnina čísla je toto číslo třikrát vynásobené samo se sebou; například třetí mocnina čísla 5 je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

***Řešení 24***

Čísla 1–8 jsou určitě šikovná, protože se dají zapsat jako součet jedné až osmi třetích mocnin čísla 1 (například $5 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$). Osm se dá navíc zapsat jako $2^3$. Tím pádem jsou však šikovná i čísla 9–16, protože jdou zapsat jako $2^3$ plus jedna až sedm třetích mocnin jedničky. 16 se dá navíc zapsat jako $2^3 + 2^3$. Tím pádem sou šikovná i čísla 17–22, protože jdou zapsat jako součet dvou třetích mocnin dvojky a součet jedné až šesti třetích mocnin jedničky. Číslo 23 však již šikovné není, protože $2^3+2^3+2^3 = 8+8+8 = 24$ a $3^3$ nám nepomůže, protože to je 27. Odpověď je tedy 23. Poznámka: Jediné další číslo, které není šikovné, je číslo 239. Všechna ostatní přirozená čísla jsou šikovná!

**Úloha 25**

Michal do čtverce 3 × 3 vepsal devět čísel: 7, 10, 13, …, 31. Michal napsal čísla tak, že součet čísel v každém řádku a v každém sloupci čtverce byl stejný. Jaká byla hodnota tohoto součtu?

***Řešení 25***

Čísla, která Michal zapsal do čtverce jsou 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31. Ať už je Michal napsat do čtverce jakkoliv, nás to naštěstí nemusí pro vyřešení úlohy zajímat. Pokud totiž sečteme všechna čísla ve čtverci, tak musíme dostat stejný součet, jako když sečteme hodnoty tří řádků, nebo tří sloupců. Ve všech třech případech jsme sečetli všechna čísla, akorát v jiném pořadí. Budiž součet čísel v každém řádku a sloupci rovna $A$. Pak platí, že $3A = S$, kde $S$ je součet všech čísel ve čtverci. Takže $A = (7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31)/3 = 57$.

**Úloha 26**

Kolik je mezi čísly od 1 do 10000 takových, že nejsou dělitelná ani 13, ani 51?

***Řešení 26***

Spočítejme raději čísla, která jsou dělitelná buď 13, nebo 51 a jejich počet odečtěme od 10000. Tím dostaneme počet čísel, které nejsou dělitelné ani 13 ani 51.

Kolik je čísel mezi 1 a 10000, které jsou dělitelné 13? Je jich 10000/13, zaokrouhlené dolů. Zaokrouhlené dolů proto, že pokud nevyjde celé číslo, tak to znamená, že k dalšímu násobku 13 jsme se ještě nedostali, a proto ho nesmíme započítat. Například kdybychom měli spočítat počet čísel dělitelných 13 mezi 1 a 25, tak $25/13 \approx 1{,}923$, což po zaokrouhlení dolů dává 1. Tím pádem, počet čísel dělitelných 13 od 1 do 10000 je $10000/13 \approx 769{,}231 \rightarrow 769$. Podobně počet čísel dělitelných 51 od 1 do 10000 je $10000/51 \approx 196{,}078 \rightarrow 196$.

Pozor, ještě jsme ale neskončili. Čísla dělitelná i 13 i 51 jsme započítali dvakrát! Jedná se o čísla, která jsou dělitelná i 13 i 51, tedy nejmenším společným násobkem čísel, což je v tomto případě $13 \cdot 51 = 663$. Čísel, která jsou dělitelná 663, je $10000/663 \approx 15{,}083 \rightarrow 15$. Čísel splňujících zadání je tedy: $10000 - (769 + 196 - 15) = 9050$.

**Úloha 27**

Na oslavě je 7 žen a 5 mužů. Při přípitku si cinknou skleničkami navzájem všichni muži a každá žena si cinkne skleničkou s každým mužem. Ženy si navzájem skleničkami necinknou. Kolik cinknutí se uskuteční?

***Řešení 27***

Cinknutí skleničkou můžeme rozdělit do dvou kategorií: 1) Cinknutí mezi ženami a muži a 2) cinknutí mezi muži navzájem. Prvního typu cinknutí nastalo $5 \cdot 7 = 35$, protože každá žena si cinkla s každým mužem.

Druhého typu cinknutí nastalo $5 \cdot 4/2 = 10$. To proto, že mužů je 5, každý si cinknul se 4 zbývajícími, ale každé cinknutí jsme tímto započítali dvakrát, tedy musíme ještě vydělit dvěma. K počtu druhého typu cinknutí se můžeme dostat i takto: Pojmenujme muže A, B, C, D, E. Cinknutí byla následovná: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE a DE, opět vyšlo 10.

Celkový počet cinknutí byl tedy 35 + 10 = 45.

Poznámka: K řešení se dá dobrat i pomocí obrázku, kde muži i ženy jsou tečky a cinknutí skleničky je znázorněno čárou spojující dvě tečky. Stačí jen nakreslit všechny čáry podle zadání a poté je spočítat.

**Úloha 28**

Kostka velikosti 4 × 4 × 4 je poskládaná z 32 bílých a 32 černých kostiček velikosti 1 × 1 × 1. Jaká největší část povrchu kostky může být bílá?

***Řešení 28***

Krychle 4 × 4 × 4 má 4 typy kostek:

1. Kostky, které jsou úplně vevnitř, tedy z nich je vidět 0 stěn. Těchto je 2 · 2 · 2 = 8.
2. Kostky, které jsou ve středu stěn krychle, tedy z nich je vidět 1 stěna. Těchto je 6 · 4 = 24.
3. Kostky, které jsou na hranách, ale ne na rozích, tedy jsou z nich vidět 2 stěny. Těchto je 12 · 2 = 24.
4. Rohové kostky, ze kterých jsou vidět 3 stěny. Těchto je 8.

Kontrola: 8 + 24 + 24 + 8 = 64.

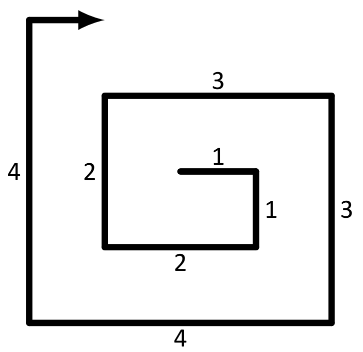
Aby byla co největší část povrchu bílá, chceme napřed mít všechny kostky typu 4 bílé, potom typu 3, typu 2 a na typ 1 použít jen černé kostky. Máme však k dipozici jen 32 bílých kostek. 8 jich použijeme na rohové kostky, zbylých 24 na hranové. Zbylé kostky budou muset být černé.

Nyní již umíme lehce spočítat, jaká část povrchu je bílá. 8 rohových kostek přispívá každá 3 stěnami, takže 8 · 3 = 24 stěn je bílých díky rohový kostkám. Hranové kostky přispívají každá dvěma stěnami, takže 24 · 2 = 48 stěn je bílých. Zbylé kostky jsou černé.

Takže bílé kostky tvoří (24 + 48)/(4 · 4 · 6) = 72/96 = 3/4 povrchu.

**Úloha 29**

Danka nakreslila na chodník „obdélníkovou spirálu“: nejdřív nakreslila dvě úsečky dlouhé 1 cm, potom dvě úsečky dlouhé 2 cm, další dvě úsečky dlouhé 3 cm a tak dále, jako na obrázku. Úhly mezi úsečkami byly vždy pravé. Křída Dance vystačila na nakreslení úseček celkové délky 1122 cm. Jaká je délka nejdelší úsečky v cm, kterou Danka nakreslila?




***Řešení 29***

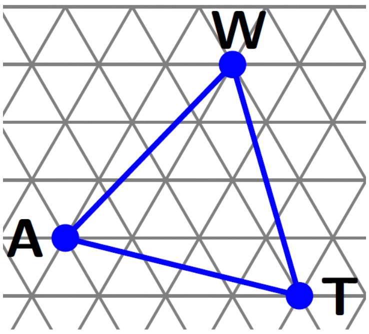
Mějme spirálu, která má úseky délky 1 až $n$ (každý dvakrát). Její celková délka bude $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\ldots+2\cdot n$. Tento součet však můžeme pěkně přeskupit tak, že vždy vezmeme jedno číslo ze začátku a jedno z konce, tedy součet bude v tomto tvaru vypadat takto: $(1+n)+(1+n)+(2+[n-1])+(2+[n-1])+(3+[n-2])+(3+$

[$n$ – 2]) + ... V každé dvojici součet $n$ + 1 a zároveň víme, že počet takových dvojic bude vždy $n$, protože máme celkem 2n čísel. To znamená, že pro spirálu, která má úseky délky 1 až $n$, bude její celková délka rovná $n \cdot (n + 1)$.

Celková daná délka spirály je 1122 a zároveň z předešlého odstavce víme, že to má být součin dvou po sobě jdoucích čísel. Po chvilce zkoušení buď ručně, pomocí kalkulačky, nebo využitím rozkladu 1122 na součin prvočísel snadno zjistíme, že řešením je $n$ = 33.

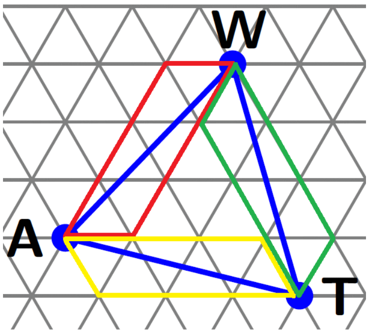
**Úloha 30**

Síť na obrázku je tvořena rovnostrannými trojúhelníky s obsahem 1 cm$^2$. Vrcholy trojúhelníku *WAT* leží v mřížových bodech této sítě, viz obrázek. Jaká je plocha trojúhelníku WAT v cm$^2$?




***Řešení 30***

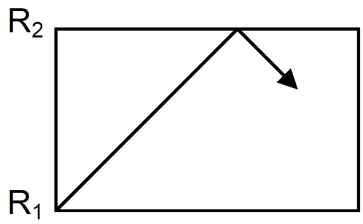
Trojúhelník rozdělíme na čtyři části jako na obrázku.




Vnitřní trojúhelníček má plochu 4 cm$^2$. Každý ze tří kosodélníků (červený, zelený a žlutý) mají plochu 6 cm$^2$. Ovšem trojúhelník z těchto ploch zabírá vždy jen polovinu, a tedy 3 cm$^3$. Celková plocha trojúhelníku je tedy $4 + 3 \cdot 3$ cm$^2$ = 13 cm$^2$.

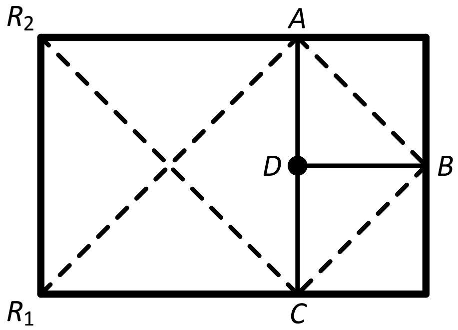
**Úloha 31**

Delší strana sportovní haly měří 30 m. V průběhu roku v ní probíhá mnoho sportovních turnajů, například turnaj v odrážení puků. Hráč poslal puk z rohu $R_1$ pod úhlem 45° tak, jak je to vyznačené na obrázku. Po třech odrazech se střela dostala do rohu $R_2$ (střela se odrazí vždy pod stejným úhlem jako dopadla). Kolik metrů měří kratší strana haly?




***Řešení 31***

Úhel dopadu a úhel odrazu jsou vždy stejné. Protože se puk odráží v obdélníkové hale, tak pokud byl poprvé odražen pod úhlem 45°, tak už se pod tímto úhlem bude odrážet vždy. Do žádné stěny nemůže narazit pod jiným úhlem. Tím pádem víme, že i do $R_2$ se dostane z místa, ze kterého byl odražen pod úhlem 45°. Takové místo je jen v bodě $C$, který je kolmo pod bodem $A$. Z toho vyplývá, že bod $B$ musí být vertikálně přesně mezi body $A$ a $C$, aby 45stupňový odraz odrazil puk do stejné horizontální vzdálenosti, jako z které přiletěl.




Trojúhelníky $R_1CA$ a $BDA$ jsou si podobné (oba jsou rovnoramenné a mají úhly 45° u ramen). Protože $|R_1A| = 2|AB|$, tak potom z podobnosti platí i $|R_1C| = 2|DB|$. Z toho je jasné, že $|DB| = 10$ m (protože $|R_1C| + |DB| = 30$). A jelikož $|DB| = |AD|$, tak $|AD| = 10$ m, z čehož plyne, že kratší strana stadionu má $2 \cdot |AD| = 2 \cdot 10 = 20$ m.

**Úloha 32**

Nechť $x$, $y$ jsou přirozená čísla. Jejich nejmenší společný násobek je 108 a největší společný dělitel je 2. Kolik takových dvojic $x$, $y$ existuje? Každou možnost počítejte jen jednou, tedy například $x = 12$, $y = 13$ a $x = 13$, $y = 12$ počítejte jako jednu možnost, ne jako dvě.

***Řešení 32***

Z podmínky, že největší společný dělitel obou čísel je 2 víme, že $x$ i $y$ jsou dělitelná dvěma. Když rozložíme 108 na součin prvočísel, dostaneme $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Víme tedy, že $x$ nebo $y$ určitě musí být dělitelné $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Nemůže však nastat případ, kdy by i $x$ i $y$ bylo dělitelné 3, protože poté by jejich největší společný dělitel nebyl 2. Zároveň taky víme, že ani $x$ ani $y$ nemůžou být dělitelné žádnými dalšími prvočísly kromě 2 a 3, protože potom by jimi musel být dělitelný i jejich nejmenší společný násobek.

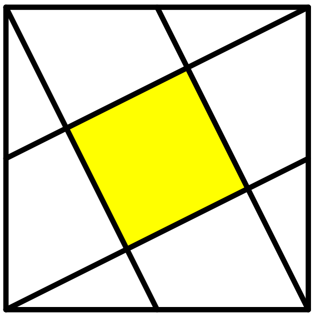
Nejmenší možná hodnota pro $x$ je $x = 2$. V tomto případě musí být $y = 108$. Máme první dvojici.

Druhá nejmenší možná hodnota pro $x$ je $x = 4$. V tomto případě musí být $y = 54$. Máme druhou dvojici.

Více dvojic neexistuje. To proto, že 108 je dělitelné jen čtyřmi, takže již nemůžeme $x$ zvětšovat násobením dvěma. Jediný způsob, jak bychom mohli zvýšit $x$, je vynásobit ho $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, ale tím pádem by již $y$ nesmělo být dělitelné 27, a tedy bychom se dostali akorát k řešením $x = 54$, $y = 4$ a $x = 108$, $y = 2$, která již jsme započítali.

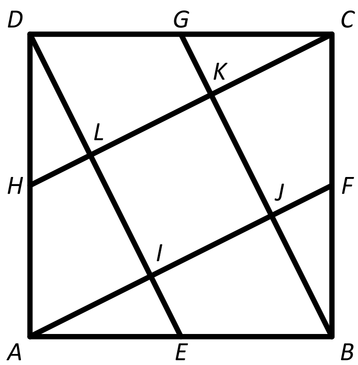
**Úloha 33**

Úsečky spojují ve velkém čtverci vždy vrchol a střed protilehlé strany. Jak velkou část čtverce zabírá malý žlutý čtverec ve středu?



***Řešení 33***

Pojmenujme vnější čtverec *ABCD*, vnitřní čtverec *IJKL* a body v polovinách stran *EFGH*.




První podstatné pozorování je, že délka strany čtverce *IJKL* je stejná, jako délky *AI*, *BJ*, *CK* a *DL*. To proto, že $|AE| = |EB|$ (ze zadání) a trojúhelníky *AEI* a *ABJ* jsou si podobné, protože mají shodný úhel *IAE* a úhly *AIE* a *AJB* jsou pravé. Podobný důkaz platí pro *BJ*, *CK* a *DL*.

Druhá věc, které je třeba si všimnout je to, že $|JB| = 2|IE|$, což vyplývá opět z toho, že trojúhelníky *AIE* a *AJB* jsou si podobné a $|AB| = 2|AE|$. Opět podobný důkaz platí pro $|CK| = 2|FJ|$, $|DL| = 2|GK|$ a $|AI| = 2|HL|$.

Z předešlých dvou zjištění vyplývá, že malý trojúhelníček *AEI* můžeme stranou *AE* přiložit k straně *EB* a vznikne čtverec, který má stejnou plochu jako čtverec *IJKL*. Stejně to můžeme udělat pro zbylé 3 čtyřúhelníky *CFJK*, *DGKL* a *AHLI*. Tím pádem jsme čtverec *ABCD* rozdělili na pět shodných čtverců (4 nově vzniklé plus čtverec *IJKL*), takže plocha čtverce *IJKL* je 1/5 plochy čtverce *ABCD*.

**Úloha 34**

V indiánské osadě žijí dva kmeny – Tabeři (kteří říkají vždy jen pravdu) a Lukeři (kteří vždy lžou). Každý ze 400 členů osady je buď lovec, strážce, nebo šaman (každý má právě jedno povolání). Každý z osady odpověděl na následující tři otázky:

1. Jsi lovec?
2. Jsi strážce?
3. Jsi šaman?

Na první otázku odpovědělo 100 obyvatelů osady „ne“, na druhou 200 „ne“ a na třetí 150 „ano“. Kolik Taberů žije v osadě?

***Řešení 34***

Přepišme si odpovědi do jednotného tvaru: Na první otázku odpovědělo 300 lidí ano, na druhou 200, na třetí 150. Celkem tedy 650 lidí řeklo ano na nějaké z povolání. Víme však, že v osadě je jen 400 členů, a tedy kdyby všichni mluvili pravdu, dostali bychom jen 400 odpovědí „ano“. Víme však také, že pokud je někdo Luker a lže, tak odpoví na dvě otázky „ano“ a na jednu „ne“. Tím pádem oněch 650 odpovědí „ano“ je složeno z počtu Taberů a dvojnásobku počtu Lukerů. Máme tedy dvě rovnice:

$T + L = 400$ (Taberů a Lukerů je dohromady 400.)

$T + 2L = 650$ (Počet odpovědí „ano“ je 650, každý Taber řekne „ano“ jednou, každý Luker dvakrát.)

Z první rovnice si vyjádříme $T = 400 - L$, což dosadíme do druhé rovnice, tedy $400 - L + 2L = 650$, tedy $L = 250$. Z toho již přímo vyplývá, že $T = 150$.

**Úloha 35**

Hana, Anna a Jana psaly na chemii test, který obsahoval 7 tvrzení. Ke každému měly napsat, zda je pravdivé, nebo ne. Hana a Anna správně odpověděly na 6 otázek a jejich odpovědi byly (v tomto pořadí):
Hana: „nepravda, nepravda, pravda, pravda, pravda, pravda, nepravda”.
Anna: „pravda, nepravda, nepravda, pravda, pravda, pravda, nepravda”.
Janiny odpovědi byly (v tomto pořadí): „pravda, pravda, nepravda, nepravda, pravda, pravda, pravda“.
Na kolik otázek odpověděla Jana správně?

***Řešení 35***

Přepišme si tvrzení holek do čitelnější formy. Písmenem P označme „pravda”, písmenem N „nepravda”. Následující tabulka shrnuje odpovědi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hana: | N | N | P | P | P | P | N |
| Anna: | P | N | N | P | P | P | N |
| Jana: | P | P | N | N | P | P | P |

Hana a Anna odpověděly správně obě na 6 otázek. Jejich odpovědi se lišily v otázkách 1 a 3. Víme tedy s jistotou, že na 1 otázku odpověděla buď Hana, nebo Anna špatně. Stejně tak pro třetí otázku. Nyní máme tři možnosti: Hana odpověděla na 1. i 3. otázku špatně. Tuto možnost můžeme zavrhnout, protože Hana měla 6 odpovědí správně. Stejně tak můžeme zavrhnout možnost, že Anna odpověděla na 1. i 3. otázku špatně. Tím pádem víme, že správné odpovědi na 1. a 3. otázku byly buď N a N, nebo P a P. Víme také, že ve všech ostatních otázkách již Hana a Anna neměly chyby, protože potom by nutně měly méně než 6 otázek správně.

Z toho vyplývá, že Jana měla nutně špatnou odpověď na 2., 4. a 7. otázku a určitě správnou odpověď na 5. a 6. otázku. Odpovědi na první a třetí otázku měla stejná jako Anna. Víme, že Anna z těchto otázek odpověděla správně přesně na jednu. Takže Jana měla správně buď 1., 5. a 6. otázku, nebo 3., 5. a 6. otázku. Jana měla tedy správně 3 otázky.

**Úloha 36**

Na konci fotbalového ročníku měl na kontě každý z 11 hráčů prvočíselný počet gólů. Žádní dva hráči nedali stejný počet gólů, nikdo nestřelil více než 44 gólů a všichni dali alespoň 3 góly. Týmový průměr počtu střelených gólů je rovněž prvočíslo a toto prvočíslo je jiné než počet gólů libovolného hráče. Jaký byl týmový průměr?

***Řešení 36***

Prvočísla, která splňují zadání, jsou tato: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 a 43. Je jich 13, tedy jedno budeme muset vyloučit, druhé bude týmový průměr a zbylých 11 budou počty gólů jednotlivých hráčů. Nemusíme však naštěstí zkoušet vyloučit všechny možné dvojice.

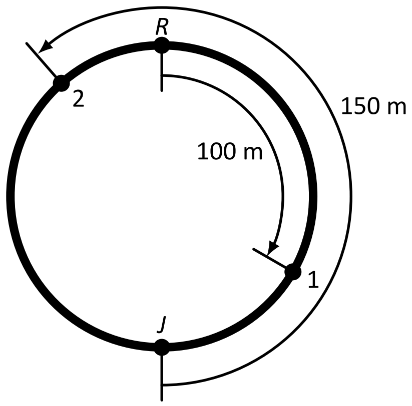
Použijeme následovného pozorování: Pokud máme několik čísel a jejich průměr je $p$, tak pokud spočítáme průměr těchto čísel s číslem $p$ přidaným mezi ně, dostaneme zase průměr $p$. Tím pádem nám stačí vyzkoušet postupně vyloučit vždy jedno číslo, spočítat průměr zbylých dvanácti čísel a podívat se, zda výsledek je prvočíslo obsažené v tomto průměru. Po vyzkoušení možností zjistíme, že jediné číslo, které toto splňuje, je číslo 3, protože $(5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43)/12 = 23$. Týmový průměr je tedy 23.

**Úloha 37**

Roman a Juro běží na kruhové atletické dráze opačným směrem. Začínají v přesně protilehlých bodech dráhy. Poprvé se setkají poté, co Roman zaběhl 100 metrů. Podruhé se setkají poté, co Juro od startu zaběhl 150 metrů. Juro i Roman každý běží rovnoměrnou rychlostí (ne nutně oba stejnou). Kolik metrů má atletická dráha?

***Řešení 37***

Roman a Juro se poprvé setkají v bodě 1. Roman to měl do bodu 1 daleko 100 metrů. Podruhé se setkají v bodě 2. Juro to tam měl 150 metrů daleko.




Zatímco při prvním setkání uběhli dohromady Juro a Roman polovinu kruhu, při druhém setkání už spolu uběhli celý jeden kruh. Z toho však vyplývá, že poté, co vyrazili z bodu 1, museli Roman i Juro oba uběhnout dvakrát tolik, co uběhli než se dostal do bodu 1.

U Jura víme, že celkem uběhl 150 metrů. Do bodu 1 uběhl polovinu toho co z bodu 1 do bodu 2. Proto musela být mezi bodem $J$, ze kterého Juro vyrážel, a bodem 1 vzdálenost 50 metrů. Vzdálenost mezi body 1 a 2 tedy musela být 100 m. Vzdálenost mezi body $J$ a $R$ je ze zadání polovina kruhu. Vzdálenost mezi $R$ a bodem 1 je 100 metrů, vzdálenost mezi bodem $J$ a 1 (jak jsme vypočetli), je 50 metrů. Tedy celkem je polovina kruhu dlouhá 150 metrů, celý kruh má tedy 300 metrů.

**Úloha 38**

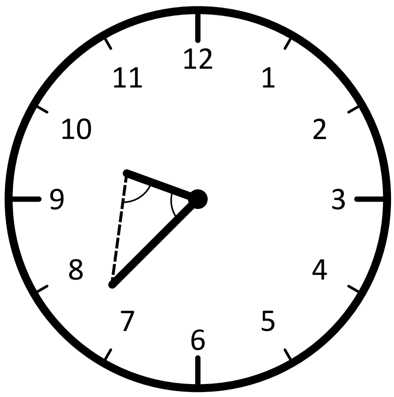
V rovině je nakreslených 10 přímek. Přesně dvě přímky jsou rovnoběžné. V každém průsečíků se střetávají vždy přesně dvě přímky (tedy ne tři, nebo více). Kolik průsečíků je v rovině?

***Řešení 38***

Představme si, že dané přímky postupně dokreslujeme na rovinu. Při dokreslení první přímky bude na rovině 0 průsečíků. Dokresleme druhou přímku, která je rovnoběžná s tou původní. Stále máme 0 průsečíků. Dokresleme třetí, tentokrát již různoběžnou, přímku. Získáme tím dva průsečíky – jeden s první a druhý s druhou přímkou, které již na rovině byly. Dokresleme čtvrtou, opět různoběžnou, přímku. Přibudou 3 průsečíky – jeden s každou přímkou, které již byly na rovině. Při dokreslení každé další přímky přibude na rovině o jeden průsečík více než při dokreslení předcházející přímky. Celkem tedy bude na rovině $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$ průsečíků.

**Úloha 39**

Někdy mezi 9:30 a 10:00 tvoří trojúhelník určený minutovou a hodinovou ručičkou znázorněný na obrázku rovnoramenný trojúhelník. Kromě toho je velikost dvou stejných úhlů v tomto trojúhelníku dvojnásobkem velikosti posledního úhlu. Jaký čas ukazují hodiny? Čas zadejte ve tvaru HH:MM, např. 09:28.




***Řešení 39***

Napřed se zaměřme na velikosti úhlů. V rovnoramenném trojúhelníku jsou dva úhly shodné a všechny tři úhly dávají součet 180°. Označme si úhly v našem trojúhelníku písmeny $x$, $y$, $y$ ($y$ jsme použili dvakrát, protože se jedná o rovnoramenný trojúhelník). Platí $x + 2y = 180°$. Zároveň ale ze zadání víme, že $y = 2x$. Tím pádem, když dosadíme do první rovnice, $x + 4x = 180°$, tedy $x = 36°$ a tedy $y = 72°$.

Úhel y však zároveň udává úhel mezi hodinovou a minutovou ručičkou. Vzhledem k tomu, že 360 stupňů odpovídá 60 minutám, tak potom 72 stupňů odpovídá $72 \cdot (60/360) = 12$ minutám. Víme tedy, že mezi hodinovou a minutovou ručičkou je 12 minutových dílků.

Zbývá tedy určit, kde se nachází hodinová ručička. Hodinová ručička se posune o jeden minutový dílek každých $60/5 = 12$ minut. Takže 9:00 je přesně na 45 minutách, 9:12 je na 46 minutách, 9:24 je na 47 minutách, 9:36 je na 48 minutách, 9:48 je na 49 minutách. Nyní již vidíme, že řešením je čas 9:36, protože tehdy je mezi hodinovou a minutovou ručičkou rozdíl přesně 12 minut, které odpovídají vypočítaným 72 stupňům.

**Úloha 40**
Dvě čísla jsme zaokrouhlili na desítky. Jaká čísla jsme měli před zaokrouhlením, pokud víme, že současně platí:

1. podíl zaokrouhlených čísel je stejný jako podíl původních čísel,
2. součin zaokrouhlených čísel je o 295 větší než součin původních čísel,
3. součet zaokrouhlených čísel je o 6 větší než součet původních čísel.

Čísla zadejte seřazená vzestupně.

***Řešení 40***
Číslo můžeme zaokrouhlením buď zvětšit maximálně o 5 (třeba zaokrouhlením 15 na 20), nebo zmenšit maximálně o 4 (například zaokrouhlením 14 na 10). Tím pádem je z třetí podmínky jasné, že jsme obě čísla zaokrouhlili nahoru, protože součet zaokrouhlených čísel se zvětšil o 6. Víme tedy, že toto jsou jediné možnosti, čím mohla končit původní čísla: 5 a 9, 6 a 8, 7 a 7, 8 a 6, 9 a 5.

Druhou podmínku však splňují jen možnosti 5 a 9, 9 a 5. To proto, že součin zaokrouhlených čísel bude končit nulou. Součin čísel s 5 a 9 na koncích bude končit pětkou, tedy po odečtení bude rozdíl také končit pětkou (tak, jako číslo 295). Pro 6 a 8 končí součin 8, pro 7 a 7 končí 9, tedy po odečtení od součinu zaokrouhlených čísel nikdy nedostaneme pětku (a tedy rozdíl součinů nemůže být 295).

Když už víme, čím čísla končí, umíme si vyjádřit první podmínku pomocí jednoduché rovnice. Označme původní čísla $A$ a $B$. Potom platí: $A/B = (A + 5)/(B + 1)$. Úpravou snadno dostaneme, že $A = 5B$. Víme tedy, že větší z čísel (v našem případě $A$) je pětinásobek čísla $B$. Zjistili jsme taky, že menší z čísel končí devítkou a větší pětkou. Zbývá již jen použít druhou podmínku a dosadit. Druhá podmínka se dá zapsat jako: $(A+5)(B+1) = AB+295$. Úpravami dostaneme $5B+A = 290$. Víme, že $A = 5B$, tedy $2A = 290$, a proto $A = 145$ a $B = 29$.

**Úloha 41**
Na drátě sedí vrabci a holubi. Když odletí pět vrabců, na drátě zůstanou na každého vrabce dva holubi. Když potom odletí ještě 25 holubů, zůstanou na každého holuba tři vrabci. Jaký byl původní počet vrabců?

***Řešení 41***
Z druhé věty je zřejmé, že na drátě muselo být alespoň 26 holubů. To proto, že poté, co jich odletělo 25, zůstalo na drátě na každého holuba tři vrabci, tedy počet holubů nemohl být nula (nebo méně). Vyzkoušejme si, co by se stalo, kdyby holubů na začátku bylo 26. Potom by tam na konci zůstal 1 holub a tím pádem taky 3 vrabci. Předtím však odletělo 5 vrabců, takže pokud by bylo na drátě na začátku 26 holubů, muselo by tam být 8 vrabců. Nyní však neplatí první podmínka: po odletu pěti vrabců jsou na každého vrabce 26/3 holubi.

Co by se tedy stalo, kdyby bylo na drátě 27 holubů? Potom by tam na konci muselo být 6 vrabců, tedy na začátku by jich muselo být 11. Tím pádem je první podmínka opět nesplněná – na každého vrabce by bylo 27/6 holubů.

Vidíme však, že přidáním jednoho holuba přidáme vždy tři vrabce. Potřebujeme tedy, aby poměr (holubi)/(vrabci – 5) byl 2, podle podmínky ze zadání. Další dvojice tedy bude 28/9, stále málo. Další 29/12, stále nic. 30/15 vyhovuje, máme řešení. Tedy holubů bylo původně 30 a vrabců muselo být 15 + 5 = 20.

**Úloha 42**

Najděte pět po sobě jdoucích přirozených čísel, pro které platí: součet druhých mocnin prvních třech čísel se rovná součtu druhých mocnin posledních dvou čísel. Jakou hodnotu má nejmenší z těchto pěti čísel? Poznámka: Druhá mocnina čísla je toto číslo vynásobené samo se sebou; například druhá mocnina čísla 5 je 25.

***Řešení 42***

Označme si prostřední číslo pětice $x$. Potom ze zadání víme, že platí: $(x-2)\cdot(x-2)+(x-1)\cdot(x-1)+x\cdot x = (x+1)\cdot(x+1)+(x+2)\cdot(x+2)$ Roznásobením obou stran dostaneme rovnici: $x\cdot x-4x+2+x\cdot x-2x+1+x\cdot x = x\cdot x+2x+1+x\cdot x+4x+2$, což zjednodušíme na: $3\cdot x\cdot x-6x+3 = 2\cdot x\cdot x+6x+3$, což dále zjednodušíme na: $x\cdot x = 12x$. Jedním řešením této rovnice je $x = 0$, to však nevyhovuje zadání, protože první dvě čísla pětice by musela být záporná. Nebyla by tedy přirozená, jak vyžaduje zadání. Druhé řešení rovnice je $x = 12$, z čehož vyplývá, že nejmenší číslo pětice je $x-2 = 10$.

**Úloha 43**

Pravidelný mnohoúhelník má 44 uhlopříček. Kolik má tento mnohoúhelník stran?

***Řešení 43***

**Řešení 1:** Podívejme se na několik malých případů, kde si umíme uhlopříčky nakreslit. Pro čtverec (který má 4 strany) máme 2 uhlopříčky. Pro pětiúhelník máme 5 uhlopříček. Pro šestiúhelník 9 uhlopříček. Co by se stalo, kdybychom nyní vzali již existující šestiúhelník, rozpojili ho (ale nechali jeho již nakreslené uhlopříčky) a přidali do něj sedmý vrchol – tedy z něj udělali sedmiúhelník? Kolik uhlopříček bychom museli přidat? Museli bychom jich přidat 5, protože se dvěma vrcholy nový vrchol sousedí a do jeho samotného uhlopříčka nevede. Tím pádem by sedmiúhelník měl 9 + 5 = 14 uhlopříček.

Teď již víme, jak pokračovat dále. Osmiúhelník by měl 14 + 6 = 20 uhlopříček, devítiúhelník 20 + 7 = 27, desetiúhělník 27 + 8 = 35 a jedenáctiúhelník 35 + 9 = 44. Výsledek je tedy jedenáctiúhelník.

**Řešení 2:** Vyjádřeme si závislost počtu uhlopříček na počtu stranách: $n\cdot(n-3)/2$, kde $n$ je počet stran. To proto, že z každého vrcholu vede uhlopříčka do $n-3$ vrcholů (nevede do sousedů a sebe sama) a dělíme dvojkou, protože každou uhlopříčku jsme tímto způsobem počítali dvakrát. Potom již jen řešíme rovnici $n\cdot(n-3)/2 = 44$, která lze řešit i bez znalosti kvadratických rovnic – hledáme číslo a toto číslo o tři menší, které spolu ponásobené dávají 88, což umíme efektivně nalézt zkoušením.

**Úloha 44**

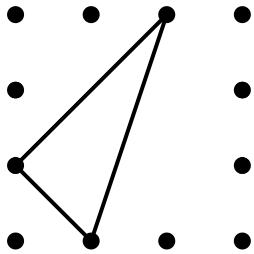
Kolik trojciferných čísel je takových, že jejich cifry zleva doprava stoupají? Například číslo 137 tuto vlastnost splňuje, ale čísla 215 a 115 ji nesplňují.

***Řešení 44***

Taková čísla musejí začínat číslicí 1, 2, 3, 4, 5, 6 nebo 7. Nemůžou začínat čísly 8 nebo 9, protože by pak již nešla splnit podmínka ze zadání. Pokud začíná číslo číslicí 7, tak máme jedinou možnosti: 789. Tím pádem pro sedmičku, jako první cifru, je jen jediná možnost. Podívejme se na šestku na první pozici. Zde máme možností více: 678, 679, 689, tedy celkem 3 možnosti. U pětky je již možností více, tak se opět podívejme, které cifry můžou být na druhé pozici, pokud je na první pozici cifra 5. Můžou to být číslice 6, 7, 8. Pokud je to 6, máme 3 možnosti, pro 7 jsou to 2 možnosti a pro 8 je to jedna možnost, tedy celkem 3 + 2 + 1 = 6 možností, pokud je na prvním místě cifra 5.

Pro cifru 4 na prvním místě můžeme postupovat stejným způsobem jako pro cifru 5, tedy dostaneme celkem 4 + 3 + 2 + 1 = 10 možností. Pro cifru 3: 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 možností. Pro 2: 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21. A konečně pro 1: 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28. Tedy celkem máme 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84 možností.

**Úloha 45**
Podél hran čtverce 3 × 3 je s rovnoměrnými rozestupy nakreslených 12 bodů jako na obrázku. Kolik trojúhelníků se dá vytvořit tak, že jejich vrcholy budou tvořeny třemi z těchto 12 bodů?



***Řešení 45***
Podívejme se napřed, kolik je na obrázku všech možných trojic bodů. Z těchto trojic některé nebudou trojúhelníky, protože všechny tři body trojice budou ležet na jedné straně. Pokud tedy spočítáme počet všech trojic bodů a odečteme ty, které nejsou trojúhelníky, dostaneme počet trojúhelníků.

Celkový počet trojic bodů spočítáme takto: Vyberme si první bod, na to máme 12 možností. Nyní, když si vybíráme druhý bod, máme už jen 11 možností, jak si ho vybrat. A pro třetí bod máme jen 10 možností. Celkem je tedy $12 \cdot 11 \cdot 10$ trojic. Ale pozor, každou trojici jsme počítali víckrát. Trojici ABC jsme počítali jako ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, tedy 6krát. Proto je celkový počet trojic jen $12 \cdot 11 \cdot 10/6 = 220$.

Nyní na každé straně vzniklo několik trojic, které nejsou trojúhelníky, protože všechny tři body leží na přímce. Takové jsou pro každou stranu 4 trojice, tedy celkově jsme započítali $4 \cdot 4 = 16$ trojic, které netvoří trojúhelníky. Všechny zbylé trojice již trojúhelníky tvoří. Tím pádem je celkový počet trojúhelníků $220 - 16 = 204$.