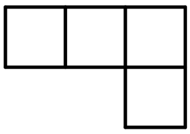
Vzorové riešenia MatX 2018

matx.p-mat.sk

14. februára 2018

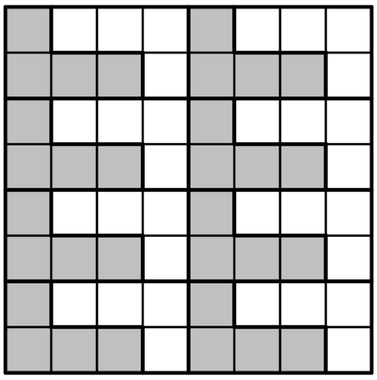
Úloha 1

V každom políčku tabuľky 8 × 8 je napísané celé číslo tak, že platí: súčet čísel v každých štyroch políčkach tvoriacich tvar písmena „L“ (viď obrázok) je 20. Aký je súčet čísel v celej tabuľke? Poznámka: „L“ môžeme ľubovoľne otáčať či prevracať.



Riešenie 1

Pokiaľ si nakreslíme tabuľku, ľahko zistíme, že sa dá celá pokryť L-kami bez prekryvov, ako na obrázku. Vieme, že súčet čísel v každom L-ku je 20 a na pokrytie celej tabuľky sme ich použili 16. Tým pádom musí byť súčet všetkých čísel v tabuľke 16 × 20 = 320.



Úloha 2

Ela si zapísala, že nakresliť 5 autíčok trvá rovnako dlho ako nakresliť 10 domčekov, nakresliť 8 domčekov trvá ako 5 štvorcov, nakresliť 10 štvorcov trvá ako 12 kruhov a nakresliť 6 kruhov trvá ako 16 srdiečok. Ak stihne nakresliť 7 autíčok, koľko by za tento čas stihla nakresliť srdiečok?

Riešenie 2

Prepíšme si zadanie do rovníc, nech sa nám v tom lepšie orientuje:

(1) 5A = 10D

(2) 8D = 5Č

(3) 10Č = 12K
(4) 6K = 16♡
Upravme si (4): 12K = 32S. Teda vieme, že 10Č = 32♡.
Upravme si (2): 16D = 10Č. Teda vieme, že 16D = 32♡.
Upravme si (1): 8A = 16D. Teda vieme, že 8A = 32♡, čo môžeme upraviť na 1A = 4♡. Tým pádom 7A = 28♡. Ela stihne nakresliť 28 srdiečok.

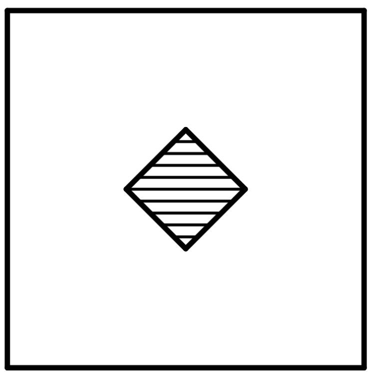
Úloha 3
Kubo spadol do studne, a tak začal liezť nahor. Každý deň vyliezol hore o 1/18 výšky studne, no v noci, keď oddychoval, klesol o 1/36 výšky studne. Po koľkých dňoch sa mu podarilo vyliezť zo studne?

Riešenie 3
Kubo každý deň vylezie o 1/18 – 1/36 = 1/36 výšky studne. Avšak vylezie z nej už za 35 dní, pretože v 35. deň už vylezie nahor a dostane sa von – teda v ten deň už nespadne o 1/36 dolu.

Úloha 4
Športovej súťaže sa zúčastní 50 tímov rozdelených do 5 skupín po 10 tímov. V každej skupine hrá každý tím jeden zápas s každým ďalším tímom z danej skupiny. Keď sa odohrajú tieto zápasy, víťazný tím z každej skupiny postupuje do druhého kola, kde opäť hrá každý tím s každým. Koľko zápasov sa celkovo odohrá?

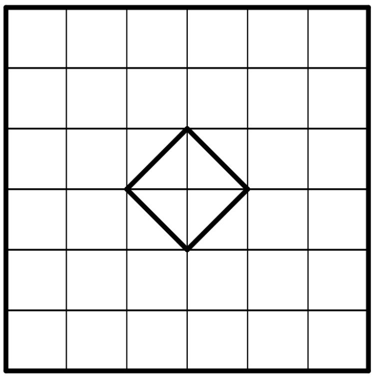
Riešenie 4
Ak je v skupine X tímov, tak odohrajú X × (X – 1) / 2 zápasov. To preto, že máme X možností ako si vybrať 1. tím a (X – 1) možností ako si vybrať 2. tím. Aby sme však nepočítali zápas A vs B a B vs A ako dva zápasy, musíme ešte výsledok vydeliť dvomi. V každej z piatich skupín bolo 10 tímov. Tie hrali každý s každým, teda celkom muselo prebehnúť v každej skupine 10 × 9 / 2 = 45 zápasov, celkom teda 5 × 45 = 225 zápasov. Potom sa muselo ešte odohrať 5 × 4 / 2 = 10 zápasov, celkovo teda 225 + 10 = 235.

Úloha 5
Jankova sestra si pred Vianocami vystrihovala vločky z papiera. Janko si tiež nachystal papier v tvare štvorca s dĺžkou strany 6 cm. Chcel však byť originálny, a tak namiesto zárezov, trojuholníkov a oblúkov vystrihol iba jeden štvorček. Ten vystrihol zo stredu veľkého štvorca a to tak, že stred vystrihnutého štvorčeka bol rovnaký ako stred veľkého štvorca. Malý štvorček bol oproti veľkému otočený o 45° a jeho uhlopriečka mala 2 cm (viď obrázok). Aký obsah v cm^2 má vločka, ktorú Janko vyrobil?



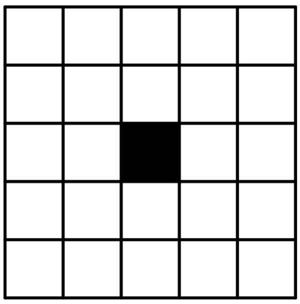
Riešenie 5
Veľký aj malý štvorec si môžeme nakresliť na štvorčekovú sieť 6 × 6 ako je na obrázku. Vďaka tejto štvorčekovej sieti je už zrejmé, že obsah vnútorného štvorčeku je 2 × 2 / 2 = 2 cm^2 a obsah veľkého

štvorca je 6 × 6 = 36 cm^2. Stačí nám vypočítať rozdiel obsahu veľkého štvorca a vystrihnutého štvorčeka, ktorý je 36 – 2 = 34 cm^2.



Úloha 6

Samo má doma mriežku 5 × 5 ako na obrázku. Políčko v strede je čierne. Koľko je na tejto mriežke štvorcov, ktoré obsahujú vo svojom vnútri čierny štvorček?



Riešenie 6

Poďme na to systematicky. Štvorce môžu mať rozmery 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4 alebo 5 × 5. Pre každú veľkosť ľahko spočítame, koľko ich vyhovuje zadaniu:

1 × 1: 1
2 × 2: 4
3 × 3: 9
4 × 4: 4
5 × 5: 1
Celkom teda 1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19.

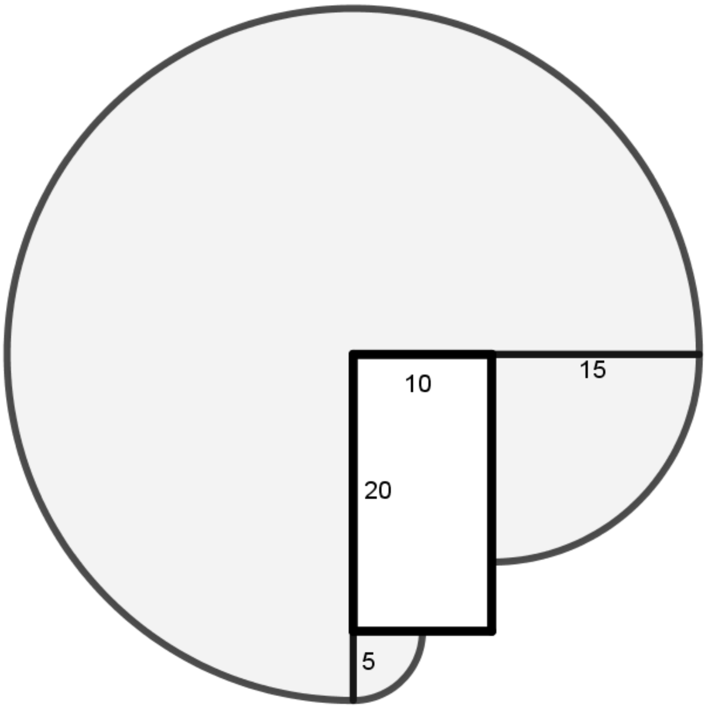
Úloha 7

Kôň je priviazaný zvonku o roh obdĺžnikovej maštale, ktorej strany sú 10 a 20 metrov. Vypočítajte obsah plochy v m^2, po ktorej sa môže prechádzať, ak lano, ktorým je priviazaný, meria 25 metrov. Odpoveď odovzdávajte zaokrúhlenú na jedno desatinné miesto. Poznámka: v tabuľke nižšie nájdete obsahy kruhov rôznych polomerov:

5 m: 78,5 m^2
10 m: 314,2 m^2
15 m: 706,9 m^2
20 m: 1256,6 m^2
25 m: 1963,5 m^2

Riešenie 7

Z obrázku vidíme, že obsah plochy, na ktorej sa kôň môže prechádzať je 3/4 kruhu s polomerom 25 m, a po 1/4 z kruhov s polomermi 15 m a 5 m. Teda 3/4 × 1963,5 + 1/4 × (78,5 + 706,9), čo je približne 1669 m^2.



Úloha 8

Traja bratia prišli do hostinca a boli unavení, tak zaspali. Hostinský im medzitým priniesol zemiaky na tanieri. Zobudil sa prvý brat a bol hladný, tak odjedol svoju tretinu zemiakov z taniera. Zobudil sa druhý a nevedel, že prvý už jedol, preto zjedol tretinu zemiakov, ktoré boli na tanieri. Tretí sa zobudil a už počul nejaký šramot, tak si myslel, že jeden človek pred ním už jedol, preto zjedol polovicu zemiakov. Na tanieri zostalo 6 zemiakov. Koľko zemiakov bolo na tanieri na začiatku?

Riešenie 8

Nech bolo zemiakov na začiatku X. Prvý brat zjedol X/3, teda zemiakov po jeho zjedení ostalo X – X/3 = 2X/3. Druhý zjedol tretinu zvyšku, takže 1/3 × 2X/3 = 2X/9. Zemiakov teda po jeho jedení ostalo 2X/3 – 2X/9 = 4X/9. Tretí zjedol polovicu zvyšku, takže 1/2 × 4X/9 = 2X/9. Po jeho jedení teda ostalo 4X/9 – 2X/9 = 2X/9 zemiakov. Teraz to je už jednoduché. Vieme, že ostalo 6 zemiakov, takže 2X/9 = 6, takže na začiatku bolo zemiakov 27.

Úloha 9

Máme tri navzájom nezhodné obdĺžniky s obsahom 12 cm^2, ktoré majú dĺžky strán vyjadrené v cm celými číslami: 1 cm × 12 cm, 2 cm × 6 cm, 3 cm × 4 cm. Určte najmenší obsah v cm^2, pre ktorý by sme získali v obdobnej úlohe práve štyri navzájom nezhodné obdĺžniky.

Riešenie 9

Zrejme najjednoduchšie riešenie je pri tejto úlohe postupovať po číslach od 12 vyššie, kým nenájdeme riešenie. Prácu si môžeme zjednodušiť tým, že preskočíme všetky prvočísla (ktoré majú len dva delitele, zatiaľčo my ich potrebujeme aspoň sedem). Po chvíľke hľadania sa dostaneme k číslu 24, ktoré spĺňa podmienky zo zadania, pretože 24 = 1 × 24 = 2 × 12 = 3 × 8 = 4 × 6.

Úloha 10

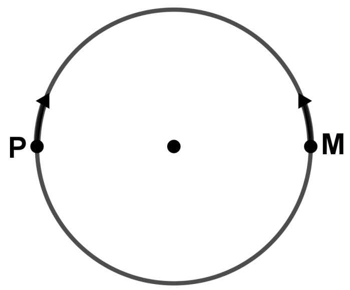
Susedka Ruženka má štyri mačky rôznych farieb, ktoré jej postupne darovali známi. Deti chcú vedieť, ako sa jej mačky volajú a ktorú dostala ako tretiu, no susedka má zlú pamäť. Povedala im:
„Ako prvú som dostala mačku Dianu.
Čiernu mačku som mala ešte pred sivou a Albínu, bielu mačku, som dostala ako druhú v poradí.
Cilku som dostala skôr, ako hnedú mačku.
Bela nemá sivú farbu."
Ktorú mačku dostala susedka ako tretiu a akú mala farbu?

Riešenie 10

Priamo zo zadania vieme, že:
1 – Diana – ?
2 – Albína – biela
3 – ? – ?
4 – ? – ?
Hneď vieme, že Cilka musela byť 3., pretože inak by nemohla byť pred hnedou. Vieme tiež, že 4. bola hnedá:
1 – Diana – ?
2 – Albína – biela
3 – Cilka – ?
4 – ? – hnedá
Čierna musela byť pred sivou, takže 1. musela byť čierna, 3. sivá. Zároveň nám na poslednú mačku ostáva už iba Bela:
1 – Diana – čierna
2 – Albína – biela
3 – Cilka – sivá
4 – Bela – hnedá

Úloha 11

Pat a Mat behajú na kruhovej dráhe. Bežia navzájom opačnými smermi. Začínajú tak, že úsečka, ktorá ich spája, je priemerom kružnice určenej dráhou. Odkedy vyštartovali, až do momentu, kedy sa stretli na jednom mieste, zabehol Pat 100 m. Od tohto momentu až do momentu, kedy sa stretli znova, zabehol Mat 150 m. Aká je dĺžka kruhovej dráhy v metroch? Poznámka: Pat aj Mat udržujú stále rovnakú rýchlosť, ktorú každý nasadil na začiatku.



Riešenie 11

Pri prvom stretnutí zabehli Pat a Mat dohromady pol dĺžky trate. Pri druhom stretnutí zabehli dohromady 1 dĺžku trate, čo im nutne muselo trvať dvakrát dlhšie ako zabehnúť pol dĺžky trate. Keď bežali celú dĺžky trate, tak Mat zabehol 150 m. Ak by teda bežal len polovicu tohto času, ubehol by 75 m. Tým pádom je polovica dĺžky trate 100 m (ktoré zabehol Pat) + 75 m (ktoré zabehol Mat) = 175 m. Celková dĺžka trate je teda 175 + 175 = 350 m.

Úloha 12

Na večierku nastala takáto situácia: Každá žena tancovala v priebehu večera s práve dvoma mužmi a každý muž tancoval s práve tromi ženami. Koľko žien bolo na večierku, ak mužov bolo 18?

Riešenie 12

Povedzme, že žien na večierku bolo Z a mužov M = 18. Spočítajme, koľko sa na večierku uskutočnilo tancov. Každá žena tancovala s dvomi mužmi, teda nutne muselo byť 2 × Z tancov. Ale zároveň vieme, že každý muž tancoval s tromi ženami, takže muselo byť 3 × M tancov. Teda 2 × Z = 3 x M. M = 18, teda 2× Z = 54 a z toho vyplýva, že žien bolo na večierku Z = 27.

Úloha 13

Tomáš nám prezradil zaujímavý fakt o svojich narodeninách: „Predvčerom som mal 25 rokov a budúci rok už budem mať 28 rokov." Toto tvrdenie môže platiť len v jednom dni v roku. Kedy má Tomáš narodeniny?

Riešenie 13

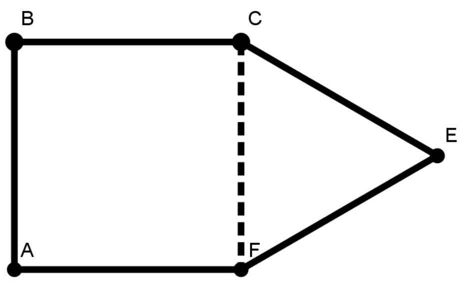
Riešenie je 31. 12. (2017) a Tomáš nám hovorí tento fakt dňa 1. 1. (2018). Predvčerom (30. 12. 2017) mal 25 rokov, 31. 12. 2017 už mal 26. Tento rok bude 31. 12. 2018 mať 27 a nabudúci rok 31. 12. 2019 už bude mať 28.

Úloha 14

Andrej má obraz v tvare päťuholníka ABCDE, v ktorom majú všetky strany rovnakú dĺžku. Navyše uhly ABC a BAE sú pravé a všetky ostatné uhly vnútri päťuholníka ABCDE sú menšie ako 180 stupňov. Aká je veľkosť uhla AED?

Riešenie 14

Ak si nakreslíme všetko, čo vieme zo zadania, dostaneme nasledujúci obrázok. ABCE je zjavne zo zadaní štvorec. Pretože všetky strany päťuholníka majú rovnakú dĺžku, tak CDE musí byť rovnostranný trojuholník, ktorý má všetky uhly 60 stupňov. Tým pádom je veľkosť uhla |AED| = 90 + 60 = 150 stupňov.



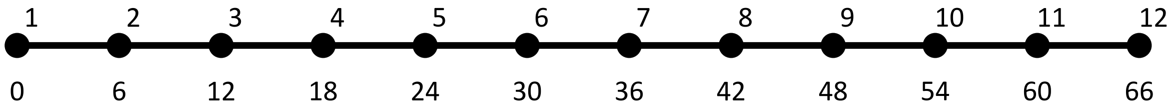
Úloha 15

Hodiny odbili 6 úderov. Od prvého do posledného úderu im to trvalo 30 sekúnd. Koľko sekúnd bude trvať odbíjanie od prvého do posledného úderu, ak bude úderov 12?

Riešenie 15

Na riešenie tejto úlohy je najlepšie si nakresliť obrázok. Z neho už ľahko vidíme, že 12 úderov bude trvať

66 sekúnd. Dôvod, prečo to nie je intuitívnych 60 sekúnd je ten, že jedno odbitie netrvá 6 sekúnd, ale práve interval medzi 2 odbitiami trvá 6 sekúnd.



Úloha 16

Hádžeme dvomi hracími kockami, jedna je modrá a druhá je červená. Aká je pravdepodobnosť, že súčet hodených čísel na oboch kockách bude 9?

Riešenie 16

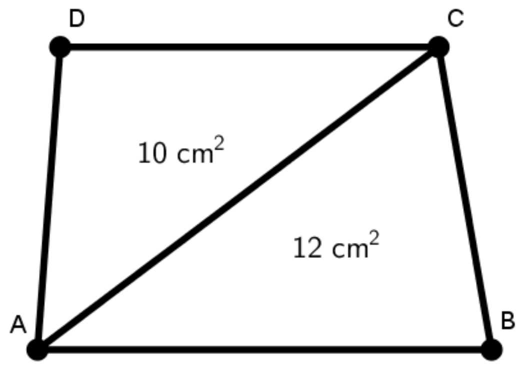
Ak hádžeme dvoma kockami, máme spolu 36 možných výsledkov, ktoré nám môžu padnúť na kockách, pretože kocky majú rôzne farby (1 na červenej a 6 na modrej nie je to isté ako 1 na modrej a 6 na červenej). Z týchto 36 možností dávajú žiadaný súčet kombinácie 3 + 6, 6 + 3, 4 + 5, 5 + 4. Spolu 4 kombinácie. Pravdepodobnosť teda je 4/36 = 1/9.

Úloha 17

Lichobežník je rozdelený jednou uhlopriečkou na dva trojuholníky, ktorých obsahy sú 10 cm^2 a 12 cm^2. Jeho dlhšia základňa má dĺžku 6 cm. Akú dĺžku v centimetroch má kratšia základňa tohto lichobežníka?

Riešenie 17

Obsah vrchného trojuholníka je dĺžka kratšej základne krát výška deleno dvoma. Obsah spodného trojuholníka je dĺžka dlhšej základne krát výška deleno dvoma. Z toho plynie, že obsah spodného trojuholníka musí byť väčší, a teda 12 cm^2. Z toho už vyplýva, že výška lichobežníka má 4 cm (pretože 4 × 6 / 2 = 12 cm^2), a teda dĺžka vrchnej základne musí byť 5 cm (pretože 4 × 5 / 2 = 10 cm^2).



Úloha 18

Alenka sa prechádzala pomedzi mrkvičkové polia. Alenke vŕtalo v hlave: „Koľko polí tu len môže byť?“ Na miestnych informáciách dostala nasledovné údaje: počet mrkvičkových polí je najmenšie šesťciferné číslo ABCDEF deliteľné piatimi také, že iba A a D sú prvočísla a jeho cifry sú zoradené zostupne (A > B > C > D > E > F). Koľko tam bolo mrkvičkových polí? Poznámka: 1 nie je prvočíslo.

Riešenie 18

Číslo ABCDEF musí byť deliteľné piatimi. Tým pádom na poslednom mieste musí byť buď 0 alebo 5. 5 tam však byť nemôže, pretože potom by na cifru A vychádzala desiatka. Takže vieme, že F = 0. A a D sú prvočísla, teda A musí byť jedným z čísel 2, 3, 5, 7. 2, 3 ani 5 byť nemôže, pretože by potom už neostali cifry na B, C, D, E. Teda vieme, že A = 7. Teraz sa pozrime na D: vieme, že nemôže byť 5, pretože by neostali cifry na B a C. Musí teda byť 2 alebo 3. Hľadáme najmenšie číslo, tak skúsime najprv D = 2. Máme 7BC2E0. Na E zostala len 1 (čo nie je prvočíslo), na B a C zostali 6 a 4. Riešenie je teda 764210. Overíme ešte, či pre D = 3 dostaneme lepšie riešenie. 7BC3E0. E = 1, pretože 2 je prvočíslo, B = 6, C = 4. Aj toto číslo teda spĺňa podmienky, avšak 764310 je väčšie než 764210, takže toto nie je správne riešenie.

Úloha 19

Prirodzené číslo Č nazývame krásne ak Č je prvočíslo, Č – 14 je prvočíslo a zároveň aj Č + 14 je prvočíslo. Nájdite súčet všetkých krásnych čísel.

Riešenie 19

Prvočíslo je také číslo, ktoré je deliteľné iba jednotkou a sebou samým. Tým pádom ak pre nejaké číslo ukážeme, že je deliteľné okrem týchto dvoch aspoň jedným ďalším, tak hneď vieme, že to nie je prvočíslo. Deliteľnosť dvojkou nemá zmysel ukazovať, pretože všetky prvočísla okrem dvojky sú nepárne. Čo tak deliteľnosť tromi? V tomto prípade chceme ukázať, že Č – 14 a Č a Č + 14 nie sú ani jedno deliteľné tromi. Dajme tomu, že Č – 14 dáva po delení tromi zvyšok 1. Potom ale Č dáva po delení tromi zvyšok 0 a teda nie je prvočíslom. Č – 14 teda nemôže dávať po delení tromi zvyšok 1. Keby však dávalo zvyšok 2 po delení tromi, číslo Č + 14 by bolo deliteľné tromi. Č – 14 teda musí byť deliteľné tromi a zároveň byť prvočíslo. Také číslo existuje len jedno a totiž trojka. Teraz už zostáva len overiť, či Č = 17 je prvočíslo a Č + 14 = 31 je prvočíslo. Vidíme, že obe sú a teda Č = 17 je jediným riešením úlohy.

Úloha 20

Trojciferné číslo voláme strašidelné, ak je deliteľné šiestimi a po vyškrtnutí ľubovoľnej cifry dostaneme dvojciferné číslo deliteľné šiestimi. Koľko je trojciferných strašidelných čísel? Poznámka: 00, 01, 02, ..., 09 nepovažujeme za dvojciferné čísla.

Riešenie 20

Označme si cifry trojciferného strašidelného čísla a, b, c. Vďaka pravidlám deliteľnosti vieme, že ab, ac, bc a abc musia byť deliteľné dvomi a zároveň tromi. Taktiež vieme, že pravidlo pre deliteľnosť trojkou hovorí, že číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný tromi. Zo zadania vieme, že má platiť, že šestkou sú deliteľné: 1) a + b + c, 2) a + b, 3) a + c, 4) b + c. Z toho vyplýva, že a, b, c musia byť všetky deliteľné tromi, pretože pokiaľ si vyberieme dve čísla, tak ich súčet musí byť deliteľný tromi. Ale pokiaľ k nim pripočítame aj tretie číslo, tak tento nový súčet musí byť taktiež deliteľný tromi. Tým pádom musí byť toto tretie číslo deliteľné tromi. Toto platí pre všetky tri čísla, takže musia byť všetky tri deliteľné tromi. Teraz sa pozrime na cifru c. Tá musí byť deliteľná tromi, ale aj dvomi, pretože celé číslo musí by deliteľné šiestimi. Cifra c teda môže byť buď 0 alebo 6. Cifra b môže byť len 6, lebo 0 byť nemôže. Cifra a môže byť 3, 6 alebo 9, pretože v žiadnom z čísel ab, ac, bc alebo abc sa nevyskytuje na poslednom mieste. Riešením sú teda možnosti: 360, 366, 660, 666, 960, 966.

Úloha 21

Máme aritmetický stroj, ktorý robí nasledovné:

1. Na vstupe dostane číslo x.
2. Číslo x vynásobí dvoma.
3. K výsledku z predošlého bodu pripočíta dva.
4. Výsledok z predošlého bodu vynásobí sám so sebou a vypíše ho na výstupe.

Jožo do stroja umiestnil svoje obľúbené číslo a zo stroja mu vypadlo rovnaké číslo ako Maťovi, ktorý tam tiež umiestnil svoje obľúbené číslo. Znamená to, že sa ich obľúbené čísla musia rovnať?

Riešenie 21

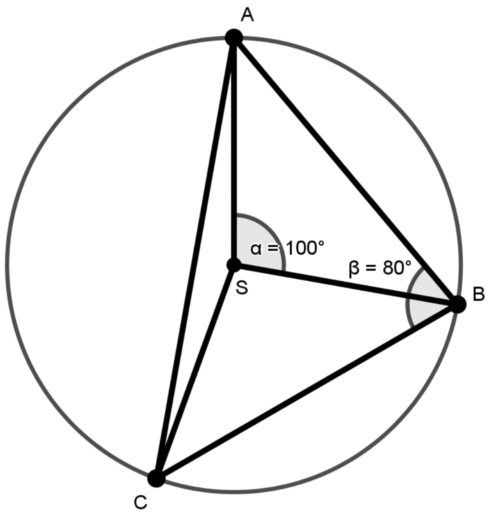
Prepíšme si matematicky, čo robí aritmetický stroj. V prvom kroku urobí z x číslo 2x. Potom 2x + 2. Následne (2x + 2) × (2x + 2). Teraz je treba si spomenúť, že napríklad 2 × 2 = 4, ale aj –2 × –2 = 4. Teda napríklad pre x = 1 dostaneme (2 × 1 + 2) × (2 × 1 + 2) = 16 a pre x = –3 dostaneme (2 × –3 + 2) × (2 × –3 + 2) = 16. Odpoveď je teda nie, do aritmetického stroja môžeme dať dve rôzne čísla, pre ktoré však stroj vráti rovnaký výsledok.

Úloha 22

Stela má troch kamarátov: Alexa, Braňa a Cypriána. Neuveriteľnou náhodou je priama cesta od Stely ku každému z ich domov rovnako dlhá. Stela zistila, že cesta k Alexovi a cesta k Braňovi zvierajú uhol presne 100°. Braňo zase zistil, že jeho cesty k druhým dvom chlapcom zvierajú uhol 80°. Cypriánovi je ľúto, že o jeho cestách nikto nerozmýšľal. Zistite aký je uhol medzi jeho cestami k Alexovi a Braňovi.

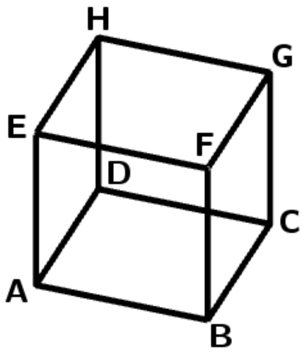
Riešenie 22

Vieme, že |ASB| = 100°. Potom tiež vieme, že |SA| = |SB| = |SC|, a že |ABC| = 80°. Pretože trojuholník ASB je rovnoramenný, musia byť uhly SAB a SBA rovnako veľké a mať veľkosť (180° – 100°)/2 = 40°. Z toho vyplýva, že aj uhol SBC bude mať veľkosť 40° a teda uhol |BSC| = 100°. Pretože |SB| = |SC|, bude trojuholník SBC rovnoramenný, teda uhol |SCB| = |SBC| = 40°. Musí platiť, že |ASC| + |ASB| + |BSC| = 360°, a |ASB| + |BSC| = 200°, teda |ASC| = 160°. Pretože trojuholník SAC je rovnoramenný, tak uhol |SCA| = (180° – 160°)/2 = 10°. Teraz stačí sčítať |SCA| + |SCB| = |ACB| = 10° + 40° = 50°, čo je veľkosť uhlu medzi cestičkami od Cypriána k Alexovi a Braňovi.



Úloha 23

Vrcholy kocky ABCDEFGH na obrázku sú označené číslami 1 až 8 pričom vrchol A má hodnotu 1. Navrhnite také umiestnenie týchto čísel vo vrcholoch kocky, aby bol súčet vrcholov na každej stene rovnaký. Riešenie zapíšte ako osmicu čísel v poradí ABCDEFGH (A = 1, takže prvé číslo bude vždy 1).



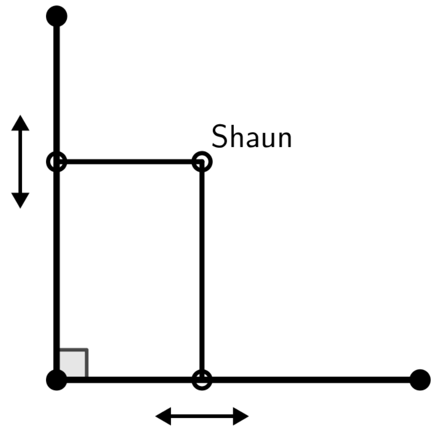
Riešenie 23

Najprv si vypočítajme, aký bude súčet čísel na jednej stene. Pretože číslo z každého vrcholu započítavame na troch stenách, musíme čísla 1 až 8 vynásobiť tromi a potom vydeliť šiestimi, čím dostaneme súčet na každú zo šiestich stien kocky: (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) × 3 / 6 = 18. Teraz stačí skúšať dokiaľ nenájdeme osmicu, ktorá spĺňa podmienky zo zadania. Riešení je pomerne dosť, tu sú všetky (pre prípad, keď hodnota vrcholu A = 1):

A B C D E F G H
1 4 5 8 6 7 2 3
1 4 5 8 7 6 3 2
1 4 6 7 8 5 3 2
1 4 7 6 8 5 2 3
1 6 3 8 4 7 2 5
1 6 3 8 7 4 5 2
1 6 4 7 8 3 5 2
1 6 7 4 8 3 2 5
1 7 2 8 4 6 3 5
1 7 2 8 6 4 5 3
1 7 4 6 8 2 5 3
1 7 6 4 8 2 3 5
1 8 2 7 4 5 3 6
1 8 2 7 6 3 5 4
1 8 3 6 4 5 2 7
1 8 3 6 7 2 5 4
1 8 5 4 6 3 2 7
1 8 5 4 7 2 3 6

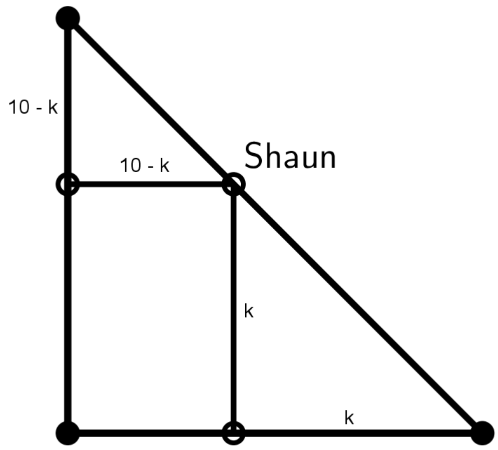
Úloha 24

Na lúke sa pasie ovečka Shaun zaviazaná na povraze nasledujúcim spôsobom: vo vrcholoch rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s odvesnami dlhými 10 m sú zastoknuté tri kolíky, ktoré sú spojené dvoma povrazmi dĺžky 10 m. Ďalší povraz rovnakej dĺžky je napojený krúžkami každým koncom na jeden z predošlých povrazov. Ovečka je prichytená krúžkom k poslednému povrazu ako na obrázku. Povrazy sa môžu volne pohybovať cez krúžky. Na akej veľkej ploche v m^2 sa vie ovečka pásť? Poznámka: Ovečka nevie prekročiť laná napnuté medzi kolíkmi.



Riešenie 24

Ovečka sa vie dostať maximálne na preponu trojuholníka, pretože pokiaľ sa od jednej odvesny vzdiali *k* metrov, tak od druhej sa môže vzdialiť maximálne 10 – *k* metrov, čím vždy vzniknú dva rovnoramenné pravouhlé trojuholníky so stranami *k* a 10 – *k* tak, ako na obrázku. Obsah tohto trojuholníka je 10 × 10 / 2 = 50 m^2.



Úloha 25

V lietadle je trikrát viac detí ako dospelých. Priemerný vek dospelých je 44 rokov. Aký je priemerný vek detí, ak celkový priemerný vek všetkých v lietadle je 20 rokov?

Riešenie 25

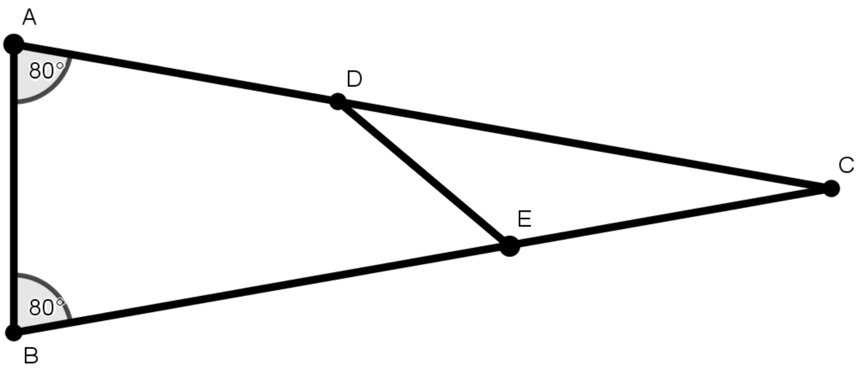
Zadanie hovorí, že priemer vekov dospelých je 44. Teda to musí platiť pre ľubovoľný prípad. Aj pre prípad, že by všetci mali 44 rokov. Rovnaká úvaha platí pre deti: môžeme predpokladať, že všetky majú rovnako veľa rokov. Tým si značne zjednodušíme úlohu. Ako sa počíta priemer: sčítame nejaké čísla a vydelíme ich ich počtom. Takže nech je dospelých D a detí je 3D (trikrát viac ako dospelých). Nech je priemerný vek detí X. Potom priemer všetkých vekov bude (pretože predpokladáme, že všetky deti a všetci dospelí majú rovnaký vek): (3D × X + 44 × D) / (3D + D) = (3X + 44) / 4 = 20. Ľahko vyjadríme, že X = 12.

Úloha 26

V trojuholníku ABC je na strane BC zvolený bod E a na strane AC bod D tak, že |BE| = |DC| a zároveň |AD| = |EC|. Aký veľký je uhol DEB ak vieme, že uhol |CBA| = 80° a |CDE| = 30°?

Riešenie 26

Z informácie, že |BE| = |DC| a zároveň |AD| = |EC| zistíme, že |BC| = |AC|, tým pádom je trojuholník ABC rovnoramenný. Z toho vyplýva, že uhly |CBA| = |BAC| = 80°. Z informácie, že |CDE| = 30° vieme, že |EDA| = 180° – 30° = 150°. Teraz sa pozrime na štvoruholník BEDA. Tri z jeho uhlov poznáme (80°, 80°, 150°) a štvrtý, na ktorý sa pýtame v zadaní, máme zistiť. Súčet uhlov v štvoruholníku je 360°, a teda vieme dopočítať hodnotu zostávajúceho uhlu DEB: 360° – 80° – 80° – 150° = 50°.



Úloha 27

Jožko veľmi rád chodí na zmrzlinu do svojej obľúbenej cukrárne. Ponúkajú tu 10 príchutí zmrzliny, z ktorých 5 je ovocných: banán, citrón, jablko, malina, ríbezľa; a 5 smotanových: vanilka, čokoláda, kokos, pistácia, stracciatella. Jožko je ale veľmi prieberčivý a pri vytváraní perfektnej kombinácie zmrzlín sa riadi týmito pravidlami:

1) Nekombinuje navzájom ovocné a smotanové kopčeky. Jedinou výnimkou je malinová, ktorú kombinuje aj so smotanovými.
2) Ak si dáva ovocnú, dá si 3 kopčeky.
3) Ak si dá smotanovú, dá si iba 2 kopčeky (ak s nimi kombinuje malinovú, tak si dá jeden kopček malinovej a jeden kopček smotanovej).
4) Z jednej príchute si dáva maximálne 2 kopčeky.
5) Banánové kopčeky nikdy nekombinuje s citrónovými kopčekmi.
6) Jablkový kopček alebo kopčeky si dá len vtedy, keď si dá aj aspoň jeden ríbezľový kopček.

Koľko rôznych kombinácií zmrzliny môže Jožko vytvoriť? Poznámka: Kombinácia, ktorá vznikne len prehodením poradia kopčekov sa ráta ako rovnaká.

Riešenie 27

Tato úloha vyžadovala veľkú dávku trpezlivosti a pozornosti. Rozdeľme si zmrzliny do troch skupín:

1) Len smotanová.
2) Malina + jeden kopček smotanovej.
3) Len ovocná.

V prvej skupine máme 15 možností. V druhej ich máme len 5. Tretiu si vypíšme:
BBM, BBR, BJR, BMR
CCM, CCR, CJR, CMR
JJR, JMR
MMB, MMC, MMR
RRB, RRC, RRJ, RRM
Teda 4 + 4 + 2 + 3 + 4 = 17 možností.
Dohromady teda máme 15 + 5 + 17 = 37 možností.

Úloha 28

Číslo nazývame šťastné, ak je deliteľné bezo zvyšku jedným z čísel 2, 3, 5 alebo 7. Koľko čísel od 1 do 100 nie je šťastných?

Riešenie 28

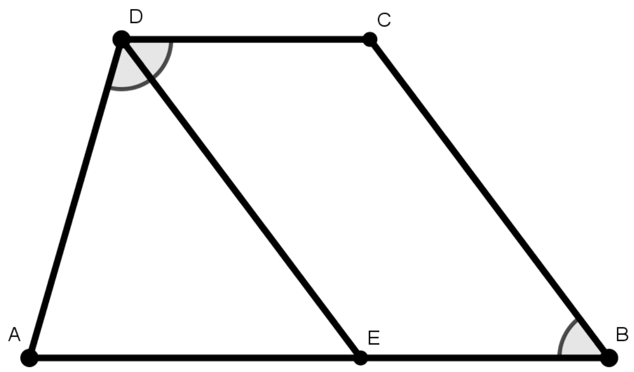
Hľadáme čísla od 1 do 100, ktoré nie sú deliteľné 2, 3, 5 alebo 7. Dôležité je si všimnúť, že všetky tieto čísla sú prvočísla. Každé číslo vieme zapísať ako súčin prvočísel. Existuje teda nejaké číslo od 1 do 100, ktoré vieme zapísať ako súčin aspoň dvoch prvočísel, ktoré nie sú 2, 3, 5 ani 7? Najmenšie také číslo je $11 \times 11 = 121$, ktoré je väčšie než 100. Takže vieme, že také žiadne číslo nie je. Tým pádom hneď vieme, že jediné čísla, ktoré nám vyhovujú sú prvočísla a číslo 1: 1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ktorých je celkom 22.

Úloha 29

V lichobežníku ABCD so základňami AB a CD platí, že veľkosť uhla ADC je dvakrát väčšia ako veľkosť uhla ABC. Dĺžka strany AD je 4 cm a dĺžka strany CD je 3 cm. Aká je dĺžka strany AB v centimetroch?

Riešenie 29

Dokreslíme si rovnobežku s CB prechádzajúcu bodom D ako na obrázku. Bod, v ktorom sa pretne s AB, nazveme E. $|EB| = |DC| = 3$ cm, pretože EBCD je kosodĺžnik. Taktiež vieme, že $|EDC| = |ABC|$, a teda zo zadania vyplýva $|ADE| = |EDC| = |ABC|$. Tiež platí, že $|ADE| = |AED|$, pretože ED je rovnobežná s CB. Z toho vyplýva, že trojuholník AED je rovnoramenný s ramenami $|AD| = |AE| = 4$ cm. Už len sčítame $|AB| = |AE| + |EB| = 4 + 3 = 7$ cm.

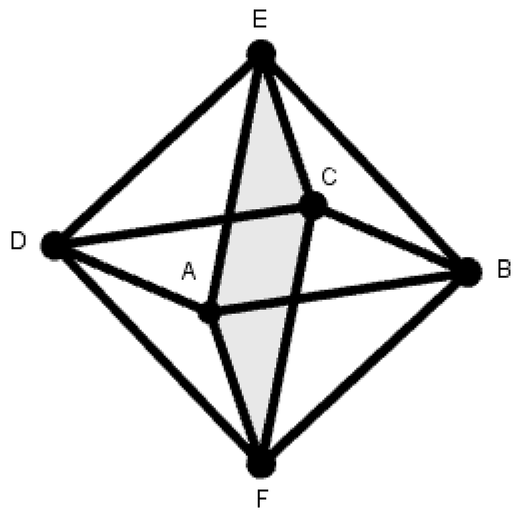


Úloha 30

ABCDEF je pravidelný osemsten so stranou 3 cm tvorený štvorbokými ihlanmi ABCDE a ABCDF. Určte obsah štvoruholníka EAFC v cm^2.

Riešenie 30

Uhol ABC je pravý. Z toho vyplýva, že i uhly AEC a AFC musia byť pravé, pretože |AE| = |EC| = |AF| = |FC| = |AB| = |BC| = 3 cm a všetky tri trojuholníky ABC, AEC a AFC zdieľajú preponu AC. Z toho už priamo vyplýva, že štvoruholník EAFC je štvorec. Jeho obsah je teda 3 × 3 = 9 cm^2.



Úloha 31

120 eur je treba rozdeliť piatim robotníkom tak, aby druhý robotník dostal o toľko eur viac než prvý, o koľko tretí dostal viac než druhý, štvrtý než tretí a piaty než štvrtý. Prví dvaja robotníci majú dostať dokopy sedemkrát menej eur než ostatní traja dokopy. Koľko eur má dostať druhý robotník?

Riešenie 31

Označme si platy robotníkov postupne a, b, c, d, e. Zo zadania vieme, že b = a + x, c = b + x, d = c + x, e = d + x, kde x je počet, o ktorý dostáva ďalší robotník viac než ten predošlý. Z tohto môžeme vyjadriť platy každého robotníka pomocou a a x: b = a + x, c = a + 2x, d = a + 3x, e = a + 4x. Taktiež vieme, že a + b + c + d + e = 120, a že 7 × (a + b) = c + d + e. Teraz stačí do dvoch posledných rovníc dosadiť za b, c, d, e: 5a + 10 x = 120 a 7 × (2a + x) = 3a + 9x, teda 11a = 2x. Dosadením do predošlej rovnice dostávame 5a + 55x = 120, teda 60a = 120, teda a = 2 a x = 11. Tým pádom prvý robotník má plat 2 eurá, druhý 13 eur, tretí 24 eur, štvrtý 35 eur a piaty 46 eur.

Úloha 32

Barbora si napísala dve rôzne celé nenulové čísla. Potom ich sčítala, odčítala, vynásobila a vydelila. Dostala štyri výsledky, ktorých súčet bol −1. Keď vynechala výsledok sčítania a spočítala ostatné tri výsledky, dostala tiež súčet –1. Ktoré celé čísla mohla Barbora pôvodne napísať? Čísla zadajte v poradí od najmenšieho po najväčšie.

Riešenie 32

Pomenujme dve čísla zo zadania A a B. Teraz podľa zadania platia tieto dve rovnice:

$(A + B) + (A \times B) + (A/B) + (A - B) = -1$

$(A \times B) + (A/B) + (A - B) = -1$

Z toho hneď vyplýva, že $A + B = 0$, teda $A = -B$. Takže namiesto A a B môžeme len povedať, že hľadané dve čísla sú A a $-A$. Zapíšme si prvú rovnicu len pomocou A:

$(A + -A) + (A \times -A) + (A/-A) + (A - -A) = -1$

čo upravíme na

$-(A \times A) - 1 + 2A = -1$

a ďalej upravíme na
$-(A \times A) + 2A = 0$
Vyjmeme A:
$A \times (2 - A) = 0$
Riešením je teda buď $A = 0$, alebo $A = 2$. Pre $A = 0$ to však byť nemôže, pretože zadanie úlohy hovorí, že A musí byť nenulové. Riešenie je teda 2 a –2.

Úloha 33
Anička a Marienka hrajú hru s kockami. Anička hodí naraz niekoľkými kockami a vyhráva, keď aspoň na jednej kocke padne šestka. Marienka zase vyhráva, keď Aničke nepadne ani jedna šestka. Najmenej koľkými kockami musí Anička hádzať, aby mala väčšiu šancu, že vyhrá, ako Marienka?

Riešenie 33
Začnime od najjednoduchšej možnosti: čo keby dievčatá mali len jednu kocku. Potom by Anička mala šancu 1/6, kým Marienka by mala šancu 5/6. Takže jedna kocka určite nestačí. Čo keby mali dve kocky? Potom Marienka potrebuje, aby jej na všetkých kockách padlo jedno z piatich čísel 2, 3, 4, 5, 6. Teda Marienka by mala šancu 5 × 5 / 6 × 6 = 25/36, že vyhrá, čo je viac ako 1/2. Čo keby mali tri kocky? Marienka mala šancu 5 × 5 × 5 / 6 × 6 × 6 = 125/216, čo je stále viac ako 1/2. Pre štyri kocky je to však už šanca pre Marienku 5 × 5 × 5 × 5 / 6 × 6 × 6 × 6 = 625/1296, čo je menej ako 1/2. Anička teda potrebuje hádzať so štyrmi kockami.

Úloha 34
Muž a žena sa ponáhľajú, aby stihli svoje lietadlo, a preto obaja bežia po posuvnom páse (v smere jazdy pásu). Muž aj žena majú rovnako dlhý krok – presne jeden meter. Muž beží dvakrát rýchlejšie ako žena (teda spraví dvakrát toľko krokov za jednotku času) a potreboval spraviť presne 28 krokov na prebehnutie pásu, zatiaľ čo žena ich potrebovala len presne 21. Koľko metrov meria posuvný pás?

Riešenie 34
Riešenie 1: Označme si rýchlosť pásu s a rýchlosť ženy v. Nech je dĺžka pásu l metrov. Potom mužova rýchlosť je $2v$. Keď sa muž a žena pohybovali po páse, tak časť cesty ich odviezol pás a časť cesty sa presunuli oni sami behom. Pomer toho, koľko sa presunuli vďaka pásu a vďaka behu je rovnaký ako pomer ich rýchlostí a rýchlosti pásu. Pre muža je tento pomer: $(l - 28)/28 = s/2v$. Podobne pre ženu, pomer je $(l - 21)/21 = s/v$. Ak vyjadríme s z oboch rovníc, dostávame: $s = 2v(l - 28)/28$ a $s = v(l - 21)/21$. Dajme obe rovnice dohromady a po pár úpravách dostávame $l - 3 \times 28 = 2l - 2 \times 21$, z čoho nám vyjde, že $l = 42$.

Riešenie 2: Predstavme si, že pohyblivý pás je dlhší. Po tom, čo žena spraví 21 krokov, muž ich už má urobených 21 × 2 = 42. Na prebehnutie pásu potreboval muž 28 krokov, a teda prešiel o 42 – 28 = 14 krokov naviac. Pretože na prebehnutie celého pásu potrebuje muž 28 krokov, tak 14 extra krokov po páse znamená, že prešiel o polovicu dĺžky pásu naviac. Muž a žena sú teraz vzdialení 42 – 21 = 21 krokov a muž prešiel 1,5 pásu a žena 1 dĺžku pásu, takže 21 krokov zodpovedá dĺžke polovice pásu. Tým pádom musí byť celý pás dlhý 2 × 21 = 42 krokov, resp. metrov.

Úloha 35
Majo si nakreslil lichobežník ABCD so základňami AB a CD. V tomto lichobežníku označil priesečník jeho uhlopriečok ako P. Zistil, že obsah trojuholníka ABP je 16-krát väčší ako obsah trojuholníka CDP. Ďalej dokreslil priamku rovnobežnú so stranou AD prechádzajúcu cez bod C, ktorá preťala stranu AB v bode E. Obdobne dokreslil rovnobežku so stranou BC prechádzajúcou cez bod D, ktorá preťala stranu AB v bode F. Určte pomer |AE|:|EF|:|FB|.

Riešenie 35

Keď si nakreslíme daný lichobežník, zistíme, že vyzerá podobne ako na obrázku. Zo zadania vieme, že |AE| = |DC| = |FB|. Trojuholníky ABP a CDP sú si podobné. Teda pomer výšky ABP a základne AB je rovnaký ako pomer výšky CDP a CD. Pretože obsah trojuholníka je výška krát základňa deleno dvomi, a pomer obsahov oboch trojuholníkov je 1:16, musí byť pomer ich základní 1:4, teda |AB| = 4|CD|. Teraz vieme, že |AB| = |AE| + |EF| + |FB| = 4|CD| = |CD| + |EF| + |CD|, a teda vieme, že |EF| = 2|CD|. Pomer |AE|:|EF|:|FB| je teda 1:2:1.